特殊相対性理論のエネルギーの変換と質量の変換

――アインシュタインの特殊相対性理論での質量の変換の導出――

A LIFE COM. バイオ研究室
富岡和人

１まえがき

アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量の変換およびエネルギーの変換の導出を示すことを，本書の趣旨としている．本書では，質量の変換の導出を示す過程でエネルギーの変換を導出した．

ニュートンの３つの運動法則である慣性の法則，運動の法則および作用反作用の法則については既知のこととした．アインシュタインの特殊相対性理論で導出できるローレンツ変換，相対論的質量およびエネルギーの式については２章で簡単な説明を与えた．しかし，２章ではそれらの詳細な知識は示していない．３章では，本書で著者が独自に定義した静止質量の定義式を与えた．本書の特殊相対性理論は，アインシュタインの特殊相対性理論を使用して著者が独自に構築したものとなる．この観点では，他の専門書で示している一般的なものとは異なる．静止質量の定義を与える際に使用する質量を３章で仮定した．その質量および質点のエネルギーの式を使用して，それらの変換を導出する過程で使用する関係式を導出する．４章では，質量の変換およびエネルギーの変換を導出する．４章の質量の変換を導出する方法ではエネルギーの変換を使用する．５章では，４章で導出した質量の変換およびエネルギーの変換を考察した．６章では運動量およびエネルギーで記述できる変換を導出した．６章までは本書で示す変換の簡単な導出について説明した．７章からは，著者が独自に与えた本書の特殊相対性理論を使用して時間および静止質量について考察をしている．一般的な講義での特殊相対性理論の説明では，真空中の光の静止質量は零であるものと教えている．零となる静止質量の値がどのように導出できるかは２０１０年現在までの著者の経験では十分な説明はないようである．真空中の光の速さで移動する質点では，相対論的質量の分母が零になってしまう．分母が零になってしまうので，分子が零であるというような数学を無視しているとも思える説明を著者は受け入れていない．真空中の光の速さでの相対論的質量の極限値を計算して，質点が真空中の光の速さで移動することを記述できない計算では光の粒子としての振る舞いを説明できなくなることが懸念される．そのような計算も著者は満足いくものとしては受け入れていない．本書の特殊相対性理論では，光の粒子が真空中の光の速さで移動している場合で静止質量を計算できるように定義した．そのような真空中の光の静止質量を定義する際に慣性座標系の時間の観測が関係する．時間を測るのに使用する時計を７章１節では導入する．その時計を使用して，真空中の光で移動する慣性座標系を仮定して真空中の光の静止質量について考察した．本書の２章で示したローレンツ変換では慣性座標系が真空中の光の速さで移動する場合は使用できない．このことで，７章１節で仮定した時計で時間を測ることにした．７章２節では，真空中の光の速さで移動する質点の質量および時間について考察している．その考察では，質点の質量は速さの関数になることを仮定した．そのように仮定した質量は静止質量を定義する際に使用する．７章１節で仮定した時計を使用した物理学理論の計算を応用して，疑リーマン幾何学の空間で説明する４次元時空を導入している．その４次元時空での不変量となる関係式から時点の微分係数を導出して真空中の光の速さで移動する質点の時間および静止質量について考察している．７章３節では，運動量，運動方程式および質点のエネルギーについての考察である．７章２節で仮定した質量で計算する運動量をニュートン力学の運動量に比較している．運動量から運動方程式に話を進めて，本書の理論での運動方程式が相対論的質量で記述できる運動方程式とは異なることを説明している．運動方程式を使用して質点のエネルギーを工率で記述している．その工率で記述した質点のエネルギーが真空中の光の速さの場合でも使用できることを示した．質点のエネルギーと質点の合力との関係が工率で与えられることを示すのにも，著者が独自に定義した静止質量の定義を使用している．７章４節では，静止質量の定義に使用した式を導出している．静止質量の定義の式を導出したあと

に運動量とエネルギーの関係式を疑リーマン幾何学のベクトルの関係式で与えている．その関係式を使用して導出した真空中の光の運動量とエネルギーの関係式が電磁気学から導出される光の運動量の計算結果に等しい表現であることを示した．７章５節では，４章で導出した質量の変換およびエネルギーの変換よりも一般的な記述の質量の変換およびエネルギーの変換を導出している．

本書のほとんどのページ数は７章から７章５節に割かれている．このことは，既に触れたように真空中の光の速さの静止質量を計算するのに相対論的質量の分母の零を招くものがあることに関係する．著者が専攻としている循環系の回路モデルの計算に分母が零になるものが論文および本に示されていたことを２０１０年現在の著者は記憶している．著者が独自に構築した循環系の回路モデル理論では，そのように分母が零になるような計算をしないで測定値に完全に一致することを説明できた．分母が零になる計算をすることは小学生でもやらないものと著者の記憶にある日本の教育課程には著者は考えるものである．しかし，工学博士あるいは医学博士が説明する循環系の回路モデル理論には，分母が零になるものと解釈せざる負えないことを著者が考える箇所が有った．どうして分母が零になる理論が論文や本になるものか，その理由は２０１０年現在の著者にも不明である．アインシュタインの特殊相対性理論で，分母が零になる計算が成立するものと誤解されている場合はないものかと懸念することもある．そのような誤解が基礎物理学理論に対して存在することで一部の工学および医学の学習者あるいは研究者の分母が零なる計算に影響を及ぼしているものかは２０１０年現在の著者には不明である．本書では，そのような誤解を減らすことができないものかとも考えて７章以降の理論の紹介を試みている．そのような著者の専攻である循環系の回路モデルの分母零の問題に影響を受けている著者の個人的な懸念から生じた力て，７章から７章５節までのページ数を苦も無く使うことができた．

付録ｉでは，４章でエネルギーの変換を使用して導出した質量の変換を，エネルギーの変換を使用しない方法で導出した．付録ⅱでは，４章で導出した質量の変換およびエネルギーの変換に対応する逆変換を導出した．付録ⅱの導出方法は，エネルギーの変換に対応する逆変換を使用して質量の変換に対応する逆変換を４章での方法で導出した．付録ⅲでは，質点の全エネルギーおよび慣性質量の関係について考察してエネルギーの保存および質量の保存について論じている．付録ⅳでは，真空中の光の速さで移動する質点の速度の変換を計算した．付録ｖでは，著者が独自に考えた方法で真空中の光の波長および周波数の変換を導出した．

本書では，速度を使用している．速度の定義については文献１で与えた．本書で使用している３次元の速度は，質点を使用して定義した速度を使用している．文献２は，著者がアインシュタインの特殊相対性理論を学んだ本である．本書を作成するための文献調査でも，とても参考になった本である．文献３は特殊相対性理論，一般相対性理論の論文およびそれらに関連する幾つかの論文を英語で記述したものが載っている本として扱われるものである．これらの論文を参考にする際には，文献３の英訳を使用した．文献４は，運動量およびニュートンの運動方程式の関係を参考にした文献である．文献５は，CODATA のファイルであり，インターネット上でダウンロードできる無償の PDF 文書で提供されていたものである．本書では，文献５の真空中の光の速さの値を使用した．CODATA については文献１のまえがきで簡単に説明をしている．

２００８年現在の著者の専攻は，循環系の回路モデルである．本書は，著者のインターネット上での情報提供活動で使用する――循環系の回路モデルの参考資料でもある．――無償のファイルとして作成している．文献６は，約１０年間の著者の研究成果――循環系の回路モデルの研究の成果である．――の主な箇所を報告したファイルである．文献７は，著者の構築している循環系の回路モデル理論で使用する血流量の定義についての研究論文である．著者の構築している循環系の回路モデル理論では，電気の回路論を使用してヒトの心臓血管系の回路モデルとして心臓血管系について解析することを試みている．その回路モデルでは，文献６で著者が独自に定義したコンプライアンスおよび流れの抵抗を電気回路論のコンデンサおよびオームの法則に従う電気抵抗に対応関係を与えている．そして，文献７で著者が独自に定義した循環

系の回路モデルのインダクタンスに電気回路論のインダクタンスを対応させている．文献６で簡単に血流量を電気回路論の電流に対応させた．その血流量を著者が独自に文献７では文献６よりも厳密に定義した．そのような循環系の回路モデル理論の血流量およびインダクタンスを定義する際には,著者が独自に与えた電流の定義を使用した.その電流の定義は,文献１１に説明をしてある．文献８～文献１０は著者が循環系の回路モデルの初心者向けに作成したファイルである．これらのファイルは無償である．文献１１～文献１２は，著者が独自に構築している循環系の回路モデル理論で使用した電気の回路論の説明をしているファイルである．文献１２では，力学的エネルギー保存の法則，質点系のエネルギー保存則および質点系の全エネルギーについて説明している．文献１３では，著者が採用している電位の定義と他書の著者が採用している電位の説明についての著者の意見を示している．

本書では‘誤り’がないことを保証はしない．本書の校正の作業は今後も行う予定である．本書の‘誤り’が見つかった際には不定期に改訂を行い発行する予定である．

目次

2　特殊相対性理論のエネルギーおよび相対論的質量

本書では，アインシュタインの特殊相対性理論のエネルギーの変換および相対論的質量の変換を導出する．２章では，その際に使用する運動量およびエネルギーの式の説明をする．

本書では図 2.1 の２つの慣性座標系を仮定する．図 2.1 の慣性座標系 S には等速度 (2.1) を仮定している．等速度 (2.1) は，図 2.1 の慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度である．図 2.1 の慣性座標系 S_1 には等速度（2.2）を仮定している．等速度（2.2）は，図 2.1 の慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度である．

$\mathbf{u}_{S\_S1} = -u\mathbf{i}_1, (u = \mathrm{const.}) \cdots (2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

$\mathbf{u}_{S1\_S} = u\mathbf{i}, (u = \mathrm{const.}) \cdots (2.2)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度

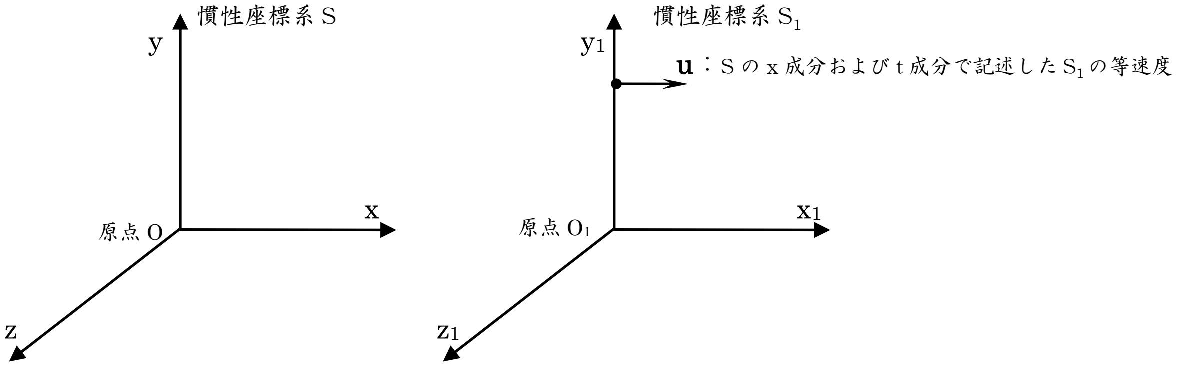

図 2.1　慣性座標系

図 2.1 の慣性座標系 S の x 軸および慣性座標系 S_1 の x_1 軸は同じ直線上に在るものと仮定する．慣性座標系 S の原点 O および慣性座標系 S_1 の原点 O_1 が一致しているときは (2.3) および (2.4) が成立することを仮定している．ただし，(2.3) および（2.4）の左辺の記号は，それぞれ慣性座標系 S および S_1 の各軸の変数とする．

$(x, y, z, t) = (0,0,0,0) \cdots (2.3)$ 慣性座標系 S の空間および時点の成分で与えた座標

$(x_1, y_1, z_1, t_1) = (0,0,0,0) \cdots (2.4)$ 慣性座標系 S_1 の空間および時点の成分で与えた座標

慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 では（2.5）が常に成立するものと仮定する．（2.5）の右辺の（2.6）は真空中の光の速さである．文献５では，真空中の光の速さの値は（2.7）――CODATA で提出している値である．――になる．

$$c^2 \cdot t^2 - x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot {t_1}^2 - {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 \cdots (2.5)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$c = 299\ 792\ 458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdots (2.7)$$

本書では，アインシュタインの特殊相対性理論の公理として特殊相対性原理および光速度の不変の原理を使用する．慣性座標系 S の原点 O および慣性座標系 S_1 の原点 O_1 に，光源を仮定する．そして，慣性座標系 S の原点 O および慣性座標系 S_1 の原点 O_1 が一致しているときに，その光源から放射された光の球面の方程式から（2.5）を不変の関係にすることができる．この（2.5）は特殊相対性原理および光速度の不変の原理を満足する．アインシュタインの特殊相対性理論で使用するローレンツ変換は（2.5）を満足することで導出することができる．次に，そのローレンツ変換を説明す

る．

特殊相対性原理：すべての慣性座標系で，物理法則は同じである．

光速度の不変の原理：すべての慣性座標系で真空中の光の速さはその光源の運動の状態で決定しないで定数であり，真空中の光の速度は等速度である．

光速度の不変の原理では，すべての慣性座標系で，真空中の光の速度は等速度である．光源の運動状態が慣性座標系内で光源から放射される真空中の光の速度の向きを決定する可能性は考えられる．

本書で使用するアインシュタインの特殊相対性理論のローレンツ変換は（2.8）～（2.11）である．(2.8）および（2.11）には係数（2.12）を記述している．係数（2.12）は（2.13）を満足する．一般的には，係数（2.12）は区間（2.14）で定義されている．そして，係数（2.12）は区間（2.15）内の値になる．ローレンツ変換（2.8）～（2.11）では（2.5）が成立する．特殊相対性原理では，ローレンツ変換で不変の記述になる運動方程式の記述を必要とする．(2.5）およびローレンツ変換（2.8）～（2.11）を使用して， ローレンツ変換で不変の記述になる運動方程式を導出できる．本書では，その運動方程式に記述される質量を使用して質量の変換を導出する．その質量の変換を導出する際に，アインシュタインの特殊相対性理論から導出できるエネルギーの式を使用してエネルギーの変換を導出する．

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \cdots (2.8)$$

$$y_1 = y \cdots (2.9)$$

$$z_1 = z \cdots (2.10)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \cdots (2.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.12)$$

$$u \neq c \cdots (2.13)$$

$$-c < u < c \cdots (2.14)$$

$$1 \leq \gamma < \infty \cdots (2.15)$$

慣性座標系 S 内に質点を仮定する．その質点の速度を（2.16）で記述する．この質点には（2.17）～（2.19）を成分として扱える合力が作用しているものと仮定する．合力の成分（2.17）～（2.19）の右辺に記述した（2.20）～（2.22）は運動量の成分である．運動量の成分 (2.20）～ (2.22）の右辺には，相対論的質量 (2.23）を記述している．(2.17）～ (2.22)の添え字は各軸の成分を意味するものとする．(2.17）～（2.19）については，文献 1 でも説明をしている．

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \cdots (2.16)$$

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \cdots (2.17)$$

$$F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \cdots (2.18)$$

$$F_z = \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \cdots (2.19)$$

$$p_x = m \cdot v_x \cdots (2.20)$$

$$p_y = m \cdot v_y \cdots (2.21)$$

$$p_z = m \cdot v_z \cdots (2.22)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

慣性座標系 S 内での相対論的質量（2.23）は，速度（2.16）の速さ（2.24）で移動する質点の質量である．相対論的質量（2.23）の分子は，速さが零である質点の質量であり，慣性座標系 S 内での静止質量と呼ばれているものである．相対論的質量（2.23）の分母には真空中の光の速さ（2.6）および速度（2.16）の速さ（2.24）を記述している．一般的には，相対論的質量（2.23）の右辺の記述から速さ（2.24）は区間（2.25）内の値になる．相対論的質量（2.23）では，区間（2.25）の記述から，質点の速度（2.16）の速さ（2.24）は真空中の光の速さ以上にはならないことになる．

$$v = |\mathbf{v}| \in \mathbf{R}, (v \geq 0) \cdots (2.24)$$

$$0 \leq v < c \cdots (2.25)$$

真空中の光の速さで移動する質点については，静止質量および時間に論点を置いて７章以降で考察を与えた．本書では，著者が独自に与えた理論で扱う静止質量の定義を使用する．その静止質量の定義は３章で示す．７章４節では，その静止質量の定義式になるものを導出している．そのような静止質量の定義では相対論的質量とは異なる質量を仮定している．

（2.26）は，アインシュタインの特殊相対性理論から導出できるエネルギーの式である．（2.26）の右辺には真空中の光の速さ（2.6）および相対論的質量（2.23）が記述されている．アインシュタインの特殊相対性理論では，――慣性座標系 S 内での計算である．――速さ（2.24）で移動している質点はエネルギー（2.26）を持つ．慣性座標系 S 内でのエネルギー（2.26）を質点の全エネルギーと呼ぶことがある．相対論的質量（2.23）を使用すると，慣性座標系 S 内でのエネルギー（2.26）は（2.27）に記述できる．エネルギー（2.27）の右辺の真空中の光の速さ（2.6）は，係数である．相対論的質量（2.23）の質点は，エネルギー（2.27）を持つことをアインシュタインの特殊相対性理論では意味する．

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (2.26)$$

$$E = m \times c^2 \cdots (2.27)$$

慣性座標系 S 内に仮定した質点を，慣性座標系 S_1 内に仮定する．その質点の速度を（2.28）とする．合力の成分（2.17）～（2.19）と同様に，慣性座標系 S_1 内の質点に合力の成分（2.29）～（2.31）を記述できる．合力の成分（2.29）～（2.31）の右辺には運動量の成分（2.32）～（2.34）を記述している．運動量の成分（2.32）～（2.34）の右辺には相対論的質量（2.35）を記述している．（2.29）～（2.34）の添え字は各軸の成分を意味するものとする．（2.29）～（2.31）については，文献１でも説明をしている．

$$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x1}\mathbf{i}_1 + v_{y1}\mathbf{j}_1 + v_{z1}\mathbf{k}_1 \cdots (2.28)$$

$$F_{x1} = \frac{\mathrm{d}p_{x1}}{\mathrm{d}t_1} \cdots (2.29)$$

$$F_{y1} = \frac{\mathrm{d}p_{y1}}{\mathrm{d}t_1} \cdots (2.30)$$

$$F_{z1} = \frac{\mathrm{d}p_{z1}}{\mathrm{d}t_1} \cdots (2.31)$$

$$p_{x1} = m_1 \cdot v_{x1} \cdots (2.32)$$

$$p_{y1} = m_1 \cdot v_{y1} \cdots (2.33)$$

$$p_{z1} = m_1 \cdot v_{z1} \cdots (2.34)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

慣性座標系 S_1 内での相対論的質量（2.35）は速度（2.28）の速さ（2.36）で移動する質点の質量である．(2.35) の分子は慣性座標系 S_1 内での静止質量である．一般的には，相対論的質量（2.35）の右辺の記述から速さ（2.36）は区間（2.37）内の値になる．相対論的質量（2.35）では，区間（2.37）の記述から，質点の速度（2.28）の速さ（2.36）は真空中の光の速さ以上にはならないことになる．

$$v_1 = |\mathbf{v}_1| \in \mathbf{R}, (v_1 \geq 0) \cdots (2.36)$$

$$0 \leq v_1 < c \cdots (2.37)$$

慣性座標系 S_1 内での（2.38）――慣性座標系 S_1 内での計算である．――は，アインシュタインの特殊相対性理論から導出できるエネルギーの式である．慣性座標系 S_1 内での相対論的質量（2.35）を使用すると，エネルギー（2.38）は（2.39）に記述できる．

$$E_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (2.38)$$

$$E_1 = m_1 \times c^2 \cdots (2.39)$$

3　質量の変換を導出するのに使用する速度の関係式

３章では，４章で導出するエネルギーの変換および質量の変換を導出する際に使用する関係式を導出する．２章で与えた関係式を使用して本章で導出する関係式を説明する．

慣性座標系 S 内に仮定した質点のエネルギー（2.26）の左辺を（3.1）のように，速度（2.16）の速さ（2.24）の関数として記述する．速さ（3.2）をエネルギー（3.1）の右辺に代入すると，(3.3) になる．エネルギー（3.3）は静止している――速さ（3.2）のことである．――質点の持つエネルギーであり，静止エネルギーと呼ばれている．３章および４章での変換の導出では，(3.1) の左辺の記述は（a.3.1）のような質点の全エネルギーにも使用することを仮定する．

$$E(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (3.1)$$

$$v = 0 \cdots (3.2)$$

$E(0) = m_0 \times c^2 \cdots (3.3)$ 静止エネルギー

慣性座標系 S_1 内に仮定した質点のエネルギー（2.38）の左辺を（3.4）のように，速度（2.28）の速さ（2.36）の関数として記述する．速さ（3.5）をエネルギー（3.4）の右辺に代入すると，(3.6) になる．エネルギー（3.6）は静止している――速さ（3.5）のことである．――質点の持つエネルギーであり，静止エネルギーと呼ばれている．３章および４章での変換の導出では，(3.4) の左辺の記述は（a.3.3）のような質点の全エネルギーにも使用することを仮定する．

$$E_1(v_1) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (3.4)$$

$$v_1 = 0 \cdots (3.5)$$

$E_1(0) = m_0 \times c^2 \cdots (3.6)$ 静止エネルギー

慣性座標系 S 内に仮定した質点を慣性座標系 S_1 内に仮定した．慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 で，その質点が静止している場合の静止エネルギーは（3.3）および（3.6）のように等しい．このことは，慣性座標系 S 内での（3.1）および慣性座標系 S_1 内での（3.4）で静止質量が等しいものと仮定したことに起因する．質点の静止エネルギーとなる（3.3）および（3.6）は（3.1）および（3.4）の右辺に記述されている．

アインシュタインの特殊相対性理論では２章で説明したように光速度の不変の原理を公理のひとつとする．光速度の不変の原理を使用することで，真空中の光の速さ（2.6）で移動する慣性座標系を仮定してもその慣性座標系で真空中の光は（2.6）で移動する．このことでは，アインシュタインの特殊相対性理論では（2.6）で移動する質点を静止して観測できる慣性座標系が２章のローレンツ変換のように与えられていないものと解釈できる余地もある．このために，(2.6）で移動する質点の静止質量についての問題が生じる．そのような考察は７章以降で与えた．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

本書での静止質量は（3.7）で定義する．静止質量（3.7）では，質点の質量（3.8）を仮定している．質点の質量（3.8）は（a.3.1）で考えることができる．本書では質量（3.8）は定義しない．７章４節で静止質量（3.7）を導出する．(3.7）の記述では，静止質量の定義（3.7）を質量の変換として考えることができる．

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \leq v \leq c) \cdots (3.7)$$

$$m(v), (0 \leq v \leq c) \cdots (3.8)$$

静止質量（3.7）を使用して，静止エネルギー（3.6）の右辺は（3.9.a）に記述できる．同様に，静止エネルギー（3.3）の右辺は（3.9.b）に記述できる．

$$E_1(v_1) \times \sqrt{1 - \frac{{v_1}^2}{c^2}} = m_0 \times c^2 \cdots (3.9.a)$$

$$E(v) \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \times c^2 \cdots (3.9.b)$$

ここで，静止質量の定義（3.7）を使用すると，(3.9.a）および（3.9.b）を使用できる区間は（3.10）および（3.11）になる．本章の以下の議論では（3.10）および（3.11）を採用して，静止エネルギー（3.9.a）および静止エネルギー（3.9.b）を使用する．

$$0 \leq v_1 \leq c \cdots (3.10)$$

$$0 \leq v \leq c \cdots (3.11)$$

相対論的質量で記述した質点の全エネルギー（3.1）は定義区間を（2.25）としている．このために，(3.1）は慣性座標系 S 内の質点の速さは真空中の光の速さ（2.6）の場合は使用できない．相対論的質量で記述した質点の全エネルギー（3.4）は定義区間を（2.37）としている．このために，(3.4）は慣性座標系 S_1 内の質点の速さ（2.6）は真空中の光の速さの場合は使用できない．

$$0 \leq v < c \cdots (2.25)$$

$$0 \leq v_1 < c \cdots (2.37)$$

静止エネルギー（3.9.a）および静止エネルギー（3.9.b）の右辺は等しいので，(3.12）を記述できる．(3.12）をエネルギー（3.13）に書き直す．(3.13）は区間（2.25）で使用することになる．４章で導出するエネルギーの変換では（3.12）を真空中の光のエネルギーの変換に書き直すことを考える．そのために，(3.12）から真空中の光の速さで使用できるエネ

ルギーの変換を導出する必要がある．

$$E_1(v_1)\times\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}=E(v)\times\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdots(3.12)$$

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},(0\le v<c)\cdots(3.13)$$

一方，エネルギー（3.13）の右辺には，慣性座標系 S_1 内の質点の速さ（2.36）および慣性座標系 S 内の質点の速さ（2.24）を記述している．このために，（3.13）の右辺に記述した（3.14）を慣性座標系 S_1 内に仮定した質点の速さ（2.36）および慣性座標系 S の速度（2.1）の成分で記述することを考える．このことで，エネルギーの変換（3.13）の右辺を慣性座標系 S_1 内に仮定した質点の速さ（2.36）および慣性座標系 S の速度（2.1）の成分のみで記述できる．

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdots(3.14)$$

$\mathbf{u}_{S\_S1}=-u\mathbf{i}_1,(u=\mathrm{const.})\cdots(2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

（3.15）～（3.17）は，速度の変換の式――速度の変換については文献 1 で，その導出および説明をしている．――である．（3.15）の左辺は，速度（2.16）の x 成分である．（3.15）の右辺には速度（2.28）の x_1 成分を記述している．（3.16）の左辺は，速度（2.16）の y 成分である．（3.16）の右辺には速度（2.28）の y_1 成分を記述している．（3.17）の左辺は，速度（2.16）の z 成分である．（3.17）の右辺には速度（2.28）の z_1 成分を記述している．速度の変換（3.15）～（3.17）では（3.18）を仮定している．（3.18）では（3.19）を満足する．

$v_x(t)=\dfrac{v_{x1}+u}{1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}\cdots\cdot(3.15)$ 速度（2.16）の x 成分――速度の変換――

$v_y(t)=\dfrac{v_{y1}(t_1)}{\gamma\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}\cdots(3.16)$ 速度（2.16）の y 成分――速度の変換――

$v_z(t)=\dfrac{v_{z1}(t_1)}{\gamma\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}\cdots(3.17)$ 速度（2.16）の z 成分――速度の変換――

$$\mathbf{v}(t)=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}\cdots(2.16)$$

$$\mathbf{v}_1(t_1)=v_{x1}\mathbf{i}_1+v_{y1}\mathbf{j}_1+v_{z1}\mathbf{k}_1\cdots(2.28)$$

$$1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\ne 0\cdots\cdot(3.18)$$

$$u\cdot v_{x1}(t)\ne -c^2\cdots(3.19)$$

（3.14）に記述してある（3.20）を計算する．（3.20）の右辺に速度の変換（3.15）～（3.17）を代入すると，（3.21）になる．

$$v^2={v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2\cdots(3.20)$$

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2 = \left(\frac{v_{x1} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \cdot v_{x1}}\right)^2 + \left(v_{y1} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} \cdot v_{x1}}\right)^2 + \left(v_{z1} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} \cdot v_{x1}}\right)^2 \cdots (3.21)$$

（3.21）の右辺の分母はすべて等しい．（3.21）の右辺は，（3.22）に記述できる．

$$v^2 = \frac{(v_{x1} + u)^2 + v_{y1}{}^2 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v_{z1}{}^2 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.22)$$

（3.22）の右辺の分子に記述した第１項を展開する．さらに，（3.22）の右辺の分子に記述した第２項および第３項を共通の係数でまとめる．これらの計算から（3.22）を（3.23）に記述できる．

$$v^2 = \frac{\left(v_{x1}{}^2 + 2v_{x1}u + u^2\right) + \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.23)$$

（3.23）の右辺の分子の第２項の係数を計算して，（3.23）を（3.24）に記述する．（3.24）の分子および分母に真空中の光の速さ（2.6）の２乗を掛けて，（3.24）の分母および分子を整理すると（3.25）に記述できる．

$$v^2 = \frac{c^2 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2v_{x1}u + u^2\right) + \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{c^2 \left(1 + \frac{u}{c^2} \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.24)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$v^2 = \frac{c^4 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2v_{x1}u + u^2\right) + c^2 \cdot \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.25)$$

（3.26）の左辺を計算する．（3.25）を（3.26）の左辺の第２項に代入すると，（3.26）の右辺を記述できる．（3.26）の右辺で分母を等しくして書き直すと，（3.27）の右辺になる．

$$c^2 - v^2 = c^2 - \frac{c^4 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + c^2 \cdot \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.26)$$

$$c^2 - v^2 = \frac{c^2 \cdot \left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} - \frac{c^4 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + c^2 \cdot \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.27)$$

真空中の光の速さ（2.6）の２乗で（3.27）の右辺の第２項を整理して，（3.28）を記述する．そして，真空中の光の速さ（2.6）の２乗で（3.28）の右辺の分子を整理すると，（3.29）になる．

$$c^2 - v^2 = \frac{c^2 \cdot \left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2 - c^2 \cdot \left\{c^2 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)\right\}}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.28)$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)\right\}}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.29)$$

（3.29）の右辺の分子に記述した第１項を展開して，（3.30）を記述する．次に，（3.30）の右辺の分子に記述した中括弧内の第２項を真空中の光の速さ（2.6）の２乗および慣性座標系の成分の２乗で整理すると（3.31）を記述できる．

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} + (u \cdot v_{x1})^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)\right\}}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.30)$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} + (u \cdot v_{x1})^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot c^2 - \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot u^2\right\}}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.31)$$

(3.31) の中括弧内を (3.32) の右辺で整理して，(3.33) を記述する．(3.32) の左辺を使用すると，(3.33) の右辺は (3.34) の右辺のように記述できる．

$$v_1{}^2 = v_{x1}{}^2 + v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2 \cdots (3.32)$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} + (u \cdot v_{x1})^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v_{x1}{}^2 + v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) + c^2 \cdot \left(2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) - \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot u^2\right\}}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.33)$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} + (u \cdot v_{x1})^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v_1{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) - \left(v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2\right) \cdot u^2\right\}}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.34)$$

(3.34) の右辺の中括弧を外して，(3.35) を記述する．(3.35) の右辺の分子に記述した第３項および第５項の括弧を外して (3.36) を記述する．

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} + (u \cdot v_{x1})^2 - c^2 \cdot \left(v_1{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + \left(v_1{}^2 - v_{x1}{}^2\right) \cdot u^2}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.35)$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} + u^2 \cdot v_{x1}{}^2 - c^2 \cdot \left(v_1{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + v_1{}^2 \cdot u^2 - u^2 \cdot v_{x1}{}^2}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.36)$$

(3.36) の右辺の第３項および第６項は互いに打ち消しあう．このことから，(3.36) は (3.37) に記述できる．

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 + 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_{x1} - c^2 \cdot \left(v_1{}^2 + 2 \cdot v_{x1} \cdot u + u^2\right) + v_1{}^2 \cdot u^2}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.37)$$

(3.37) の右辺の分子に記述した第２項は，括弧内の第２項と互いに打ち消しあう．このことから，(3.37) は (3.38) に記述できる．

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 - c^2 \cdot \left(v_1{}^2 + u^2\right) + v_1{}^2 \cdot u^2}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.38)$$

(3.38) の右辺の括弧を外して，(3.32) について整理すると (3.39) を記述できる．(3.39) の右辺の分子に記述した第１項および第２項の真空中の光の速さ (2.6) の２乗について整理して，(3.40) を記述する．

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^4 - c^2 \cdot u^2 + v_1{}^2 \cdot \left(u^2 - c^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.39)$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{c^2 \cdot \left(c^2 - u^2\right) + v_1{}^2 \cdot \left(u^2 - c^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.40)$$

(3.40) の右辺の分子は共通因数でまとめると，(3.41) に記述できる．(3.41) を (3.42) に記述する．(3.42) の両辺を真空中の光の速さ (2.6) の２乗で割って (3.43) を記述する．

$$c^2 - v^2 = c^2 \times \frac{\left(c^2 - v_1{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.41)$$

$$c^2 - v^2 = \frac{c^2 \left(c^2 - v_1{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.42)$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\left(c^2 - v_1{}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 + u \cdot v_{x1}\right)^2} \cdots (3.43)$$

（3.43）の右辺を真空中の光の速さ（2.6）の２乗で整理すると（3.44）に記述できる．（3.44）の右辺を整理すると，（3.45）に記述できる．（3.45）は（3.46）に記述できる．（3.46）を使用して，４章でエネルギーの変換を導出する．

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{c^2\cdot\left(1-\frac{{v_1}^2}{c^2}\right)\cdot c^2\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{c^4\cdot\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(3.44)$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{\left(1-\frac{{v_1}^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(3.45)$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}\cdots(3.46)$$

（3.46）は（3.14）の分母に記述されている．このことから，（3.46）を使用して（3.14）を（3.47）で記述できる．

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(3.47)$$

（3.47）では（3.48）～（3.50）を満足する．そして，（3.47）では，一般にはアインシュタインの特殊相対性理論で（3.51）～（3.53）が成立する．（3.51）を満足する速さ（2.24）の区間は（2.25）になる．（3.52）を満足する速さ（2.36）の区間は（2.37）になる．（3.53）を満足する慣性座標系 S の速度（2.1）成分の区間は（2.14）になる．

$$1-\frac{v^2}{c^2}\neq 0\cdots(3.48)$$

$$1-\frac{{v_1}^2}{c^2}\neq 0\cdots(3.49)$$

$$1-\frac{u^2}{c^2}\neq 0\cdots(3.50)$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}>0\cdots(3.51)$$

$$1-\frac{{v_1}^2}{c^2}>0\cdots(3.52)$$

$$1-\frac{u^2}{c^2}>0\cdots(3.53)$$

$$v=|\mathbf{v}|\in\mathbf{R},(v\geq 0)\cdots(2.24)$$

$$0\leq v<c\cdots(2.25)$$

$$v_1=|\mathbf{v}_1|\in\mathbf{R},(v_1\geq 0)\cdots(2.36)$$

$$0\leq v_1<c\cdots(2.37)$$

$$-c < u < c \cdots (2.14)$$

4　エネルギーの変換および質量の変換の導出

３章の導出からでは（3.12）の v および v_1 は真空中の光の速さでも使用可能である．（3.12）の右辺に（3.46）を代入する．（3.46）では（3.18）を仮定している．（3.18）は v_1 が真空中の光の速さの場合でも成立する．

$$E_1(v_1)\times\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}} = E(v)\times\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdots (3.12)$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}} \cdots (3.46)$$

$$1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2} \neq 0 \cdots\cdot (3.18)$$

（4.1）は（3.46）を（3.12）の右辺に代入したものである．（4.1）を（4.2）に書き換える．

$$E_1(v_1)\times\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}} = E(v)\times\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}} \cdots (4.1)$$

$$E_1(v_1)\times\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}} - E(v)\times\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}} = 0 \cdots (4.2)$$

方程式（4.2）の左辺は（4.3）に書き換えることができる．（4.3）から（4.4）を導出できる．

$$\left(E_1(v_1) - E(v)\times\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}\right)\times\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}} = 0 \cdots (4.3)$$

$$E_1(v_1) - E(v)\times\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}} = 0 \cdots (4.4)$$

（4.4）を（4.5）に書き換えることができる．（4.5）の右辺には v_1 の x 成分が記述されている．本章で導出したいエネルギーの変換は，２つの慣性座標系間でのエネルギーの変換である．ひとつの慣性座標系で観測した質点の全エネルギーから他方の慣性座標系で観測した質点の全エネルギーに変換する式が，本章で導出するエネルギーの変換である．（4.5）を（4.6）に書き換えることで，そのエネルギーの変換になる．

$$E_1(v_1) = E(v)\times\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}} \cdots (4.5)$$

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},(u\neq\pm c)\cdots(4.6)$$

（4.6）では，慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度（2.1）の速さは，真空中の光の速さにはできない．（4.6）の右辺の情報 $E_1(v_1)$ ，v_{x1} ，u および c は，慣性座標系 S_1 内で観測したものとして扱える．

$\mathbf{u}_{S\_S1}=-u\mathbf{i}_1,(u=\text{const.})\cdots(2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

（4.7）を使用して，エネルギーの変換（4.6）での光のエネルギーについての考察をする．（4.7）の右辺の θ_{x1} は，慣性座標系 S_1 の x_1 軸と速度ベクトル（2.28）との角度である．

$v_{x1}=v_1\cdot\cos\theta_{x1}\cdots(4.7)$

$\mathbf{v}_1(t_1)=v_{x1}\mathbf{i}_1+v_{y1}\mathbf{j}_1+v_{z1}\mathbf{k}_1\cdots(2.28)$

（4.7）を（4.6）の右辺の分子に代入すると（4.8）になる．（4.9）では，慣性座標系 S_1 内で質点が真空中の光の速さで移動することを示す．（4.9）がアインシュタインの特殊相対性理論で成立することは付録ⅳで導出している．

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{1+\frac{u\cdot v_1\cdot\cos\theta_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.8)$$

$v=v_1=c\cdots(4.9)$

（4.9）を（4.8）の右辺の分子に代入すると（4.10）になる．（4.10）の右辺を整理すると（4.11）になる．

$$E(c)=E_1(c)\times\frac{1+\frac{u\cdot c\cdot\cos\theta_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.10)$$

$$E(c)=E_1(c)\times\frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.11)$$

（4.11）では慣性座標系 S_1 内で質点が真空中の光の速さで移動するので，真空中の光のエネルギーの変換として解釈できる場合がある．この場合では，$E_1(c)$ は慣性座標系 S_1 内で観測した真空中の光のエネルギーである．

慣性座標系 S に仮定した質点のエネルギー（2.27）および慣性座標系 S_1 に仮定した質点のエネルギー（2.39）を使用して，質量の変換を導出する．ただし，（2.27）および（2.39）で使用している質量は（2.27）および（2.39）の定義区間内での質点の質量（3.8）であるものと仮定する．本章の以下の記述は（a.3.1）を使用しても可能である．エネルギーの変換（4.6）の両辺に記述されている質点のそれぞれのエネルギーに（2.27）および（2.39）を代入すると（4.12）を記述できる．

$E=m\times c^2\cdots(2.27)$

$E_1=m_1\times c^2\cdots(2.39)$

$m(v),(0\leq v\leq c)\cdots(3.8)$

$$m \times c^2 = \frac{m_1 \times c^2 \times \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.12)$$

エネルギーの変換（4.12）を（4.13）に整理する．エネルギーの変換（4.13）を（4.14）に書き直す．

$$m \times c^2 = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (4.13)$$

$$m \times c^2 - \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \times c^2 = 0 \cdots (4.14)$$

方程式（4.14）は共通因数となる真空中の光の速さ（2.6）の２乗となる定数を使用すると，（4.15）に記述できる．真空中の光の速さ（2.6）の２乗は（4.16）を満足する．（4.16）が成立しているので，方程式（4.15）が成立するためには（4.17）が成立することになる．

$$\left\{ m - \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right\} \times c^2 = 0 \cdots (4.15)$$

$$c^2 \neq 0 \cdots (4.16)$$

$$m - \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 0 \cdots (4.17)$$

方程式（4.17）は（4.18）に書き直すことができる．（4.18）は質量の変換である．

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18) \text{質量の変換}$$

質量の変換（4.18）の左辺は慣性座標系 S 内に仮定した質点の質量（3.8）である．質量の変換（4.18）の右辺には，慣性座標系 S_1 に仮定した質点の質量および質点の速さを記述している．本書では，質量の変換（4.18）の右辺には，慣性座標系 S_1 内の成分で記述した慣性座標系 S の速度（2.1）の成分が記述されているものと扱う．

一般に相対論的質量とは（2.23）および（2.35）の記述の質量に対して使用する呼称である．真空中の光の速さで移動する質点には（2.23）および（2.35）を使用できない．電磁気学および静止質量（3.7）を使用して，真空中の光の速さで移動する質点には（a.3.1）が成立することを説明できる．本書では，質量（3.8）から導出した（4.18）は質量の変換と呼ぶことにする．

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v \le c) \cdots (3.7)$$

付録ｉでは，エネルギーの変換（4.6）を使用しないで，質量の変換（4.18）の導出を示した．付録ⅱでは，質量の変換（4.18）に対応する逆変換を導出した．その逆変換を導出する過程で，エネルギーの変換（4.6）に対応する逆変換を導出した．

5　エネルギーの変換および質量の変換の考察

５章ではエネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）について考察する．エネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）は，アインシュタインの特殊相対性理論から導出できたものである．この導出には，既に説明したように幾つかの仮定を与えている．これらの仮定についてエネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）を考察する．

$$E(v) = E_1(v_1) \times \frac{1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, (u \ne c) \cdots (4.6)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18)$$

エネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）を導出する際には，質量（3.8）を使用している．相対論的質量では（2.25）および（2.37）を仮定している．エネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）では，慣性座標系Ｓ内での（3.1）および慣性座標系 S_1 内での（3.4）で静止質量が等しいものと仮定して導出した．このことから，それぞれの慣性座標系で異なる静止質量である場合には，（4.6）および（4.18）の上述の導出方法は使用できない．付録ｉで使用した（4.18）の導出方法も使用できないことは明らかである．

$$0 \le v < c \cdots (2.25)$$

$$0 \le v_1 < c \cdots (2.37)$$

速度の変換（3.15）～（3.17）では，（2.25）および（2.37）の仮定を満足する．速度の変換（3.15）～（3.17）を使用して，エネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）を導出した．もし，速度の変換（3.15）～（3.17）が成立しない仮定を採用するならば，既に４章で説明したエネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）の導出方法は使用できない．

$$v_x(t) = \frac{v_{x1}+u}{1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \cdots (3.15)$$ 速度（2.16）のｘ成分――速度の変換――

$$v_y(t)=\frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma\cdot\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}\cdots(3.16)$$ 速度（2.16）の y 成分――速度の変換――

$$v_z(t)=\frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma\cdot\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}\cdots(3.17)$$ 速度（2.16）の z 成分――速度の変換――

速度の変換 (3.15) ～ (3.17) では，時点の微分係数 (5.1) が収束して存在することを仮定している．ローレンツ変換 (2.8) ～（2.11）を使用して，時点の微分係数（5.1）を計算すると，(5.2) になる．極限値（5.1）の収束および速度の変換 (3.15) ～（3.17）との関係は文献１に説明をした．

$$t_1{}'(t)\equiv\lim_{h\to 0}\frac{t_1(t+h)-t_1(t)}{h}\cdots(5.1)$$

$$t_1{}'(t)=\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x(t)\right)\cdots(5.2)$$

アインシュタインの特殊相対性理論での時点の微分（5.2）では，一般には（5.3）の場合には極限値（5.2）が発散してしまい極限値（5.1）が収束しないものと扱える．このことで，極限値（5.1）は存在しないものとして扱うことになる．

$$v_x(t)\to\infty\cdots(5.3)$$

極限値（5.1）が存在しないので，速度の変換 (3.15) ～ (3.17) が使用できない．仮定（5.3）ではエネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）は，本書の４章のようには導出できない．一般には，２００８年現在は仮定（5.3）ではアインシュタインの特殊相対性理論を扱うことはできない．２００８年現在の一般的な日本の大学課程の物理学では，仮定 (5.3) で，ニュートンの３つの運動法則を使用することを考えることになる．ニュートンの３つの運動法則とは，慣性の法則，運動の法則および作用反作用の法則のことである．このニュートンの３つの運動法則では，質量は定数であり，その質量は慣性座標系内の質点の速さには関係ないものとして扱われている．アインシュタインの特殊相対性理論では質点のエネルギーには，(2.27) および（2.39）のように質量がエネルギーに対応することを導出できる．しかし，アインシュタインの特殊相対性理論を扱うことができない場合は，その理論で扱う場合の（2.27）および（2.39）を扱うことはできない．

$$E=m\times c^2\cdots(2.27)$$

$$E_1=m_1\times c^2\cdots(2.39)$$

仮定（5.3）をしないで，(5.4) を仮定する．仮定（5.4）では真空中の光の速さ（2.6）を使用している．５章で仮定（5.4）の極限値を計算する場合は，真空中の光の速さを変数として扱い計算している．そして，他の変数は定数として固定して扱っている．

$$c\to\infty\cdots(5.4)$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\times\varepsilon_0}},(c\neq 0,c>0)\cdots(2.6)$$

アインシュタインの特殊相対性理論からローレンツ変換（2.8）～（2.11）を導出できる．ローレンツ変換（2.8）～（2.11）では，すべての慣性座標系で，真空中の光の速さ（2.6）は同じ値――光速度の不変の原理――である．　そして，真空中の光の速さ（2.6）を有限値となる実数値で与えた．仮定（5.4）はこの有限値である真空中の光の速さではないものを仮定している．このことでは，仮定（5.4）ではアインシュタインの特殊相対性理論から導出できるローレンツ変換（2.8）～（2.11）を使用することはできない．

ここでは，ローレンツ変換（2.8）～（2.11）を数学での変換として扱い，仮定（5.4）でローレンツ変換（2.8）～（2.11）

を考察する．(2.12) はローレンツ変換 (2.8) および (2.11) に使用している係数である．係数 (2.12) に (5.5) のように極限値を考えてみることにする．

$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \cdots (2.8)$

$y_1 = y \cdots (2.9)$

$z_1 = z \cdots (2.10)$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \cdots (2.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.12)$$

$\gamma \to 1, (c \to \infty, c \in \mathbf{R}$ のとき$) \cdots (5.5)$

(5.6) ～ (5.9) はガリレイ変換と呼ばれるものである．ガリレイ変換 (5.6) ～ (5.9) はニュートンの３つの運動法則で使用する変換である．ローレンツ変換 (2.8) ～ (2.11) に (5.4) の極限値を計算できることを仮定すると，ガリレイ変換 (5.6) ～ (5.9) の右辺を記述できる．

$x_1 = x - u \cdot t \cdots (5.6)$ ガリレイ変換の位置の式

$y_1 = y \cdots (5.7)$ ガリレイ変換の位置の式

$z_1 = z \cdots (5.8)$ ガリレイ変換の位置の式

$t_1 = t \cdots (5.9)$ ガリレイ変換の時点の式

ガリレイ変換 (5.6) ～ (5.9) から導出できる速度の変換は (5.10) ～ (5.12) である．ガリレイ変換から導出できる速度の変換 (5.10) ～ (5.12) では (5.13) を満足する．(5.13) では (5.3) の議論を使用できる．このために，一般的な２００８年現在での日本の大学課程の物理学では，(5.13) ではニュートンの３つの運動法則を使用することになる．

$v_{x1} = v_x - u \cdots (5.10)$

$v_{y1} = v_y \cdots (5.11)$

$v_{z1} = v_z \cdots (5.12)$

$v_{x1} \to \infty, (v_x \to \infty, v_x \in \mathbf{R}$ のとき$) \cdots (5.13)$

一方，ローレンツ変換 (2.8) ～ (2.11) の速度の変換は (5.14) ～ (5.16) である．速度の変換 (3.15) ～ (3.17) は，速度の変換 (5.14) ～ (5.16) の逆変換である．(5.4) の極限値を速度の変換 (5.14) ～ (5.16) で計算すると，(5.10) ～ (5.12) の右辺の記述に等しくできる．その極限値に，(5.13) の極限値を計算することができる．速度の変換 (5.14) ～ (5.16) は文献１の本文で導出した．

$$v_{x1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \cdots (5.14)$$

$$v_{y1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right)} \cdots (5.15)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right)} \cdots (5.16)$$

もし, 仮定 (5.4) で本書の４章までの計算が数学的に成立するものと仮定すると, (5.17) および (5.18) が成立する. (5.17) および（5.18）は質量の変換（4.18）およびエネルギーの変換（4.6）を使用して仮定した極限値である.

$m \to m_1, (c \to \infty, c \in \mathbf{R}$ のとき$) \cdots (5.17)$

$E(v) \to E_1(v_1), (c \to \infty, c \in \mathbf{R}$ のとき$) \cdots (5.18)$

ここで, 相対論的質量（2.23）および相対論的質量（2.35）に仮定（5.4）の極限値が存在することを仮定する. この極限値を仮定すると,（5.17）はニュートンの３つの運動法則の場合の定数となる質量に近いものと解釈できることがある.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^{\ 2}}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

（5.18）の極限値は（2.27）および（2.39）を数学的に仮定して考察している.（2.27）および（2.39）が成立しない場合では（5.18）は成立しない.

$E = m \times c^2 \cdots (2.27)$

$E_1 = m_1 \times c^2 \cdots (2.39)$

エネルギーの変換（4.6）では, 各慣性座標系内で記述したエネルギー（2.27）およびエネルギー（2.39）は一般的に異なるものとして記述している. 同様に, 相対論的質量の変換 (4.18) では, 相対論的質量 (2.23) および相対論的質量 (2.35) は, 一般的に異なるものとして記述している. 質量の変換（4.18）でも同様に各慣性座標系（3.8）は一般に異なる値になる.

$$E(v) = E_1(v_1) \times \frac{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, (u \neq c) \cdots (4.6)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18)$$

（4.6）および（4.18）の右辺には速度（2.28）のｘ$_1$成分である（5.19）を記述している. そして,（4.6）および（4.18）の右辺には速度（2.28）のｙ$_1$成分およびｚ$_1$成分は記述されていない.

$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x1}\mathbf{i}_1 + v_{y1}\mathbf{j}_1 + v_{z1}\mathbf{k}_1 \cdots (2.28)$

$v_{x1} \cdots (5.19)$

さらに,（4.6）および（4.18）の右辺には, 慣性座標系Ｓの等速度（2.1）の成分が記述されているものと扱える. エネルギーの変換（4.6）の左辺および質量（4.18）の左辺は,（2.1）の成分および（5.19）で値が決定する. ただし, 慣性座標系Ｓ$_1$内の質量が決定していることを仮定する.

$\mathbf{u}_{S\_S1} = -u\mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \cdots (2.1)$ 慣性座標系 S$_1$ の x$_1$ 成分および t$_1$ 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

速度（2.28）のｘ$_1$成分である（5.20）を仮定する. 速度の変換（3.15）～（3.17）に（5.20）を代入すると, 慣性座標系Ｓ内の質点の速度（2.16）の各成分は（5.21）～（5.23）になる.

$v_{x1} = 0 \cdots (5.20)$

$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \cdots (2.16)$

$v_x(t) = u \cdots (5.21)$

$$v_y(t) = \frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma} \cdots (5.22)$$

$$v_z(t) = \frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma} \cdots (5.23)$$

一方，(5.20）をエネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）に代入すると，(5.24）および（5.25）になる．(5.24）および（5.25）の右辺の分母には慣性座標系 S の等速度（2.1）の成分を記述している．そして，エネルギーの変換（4.6）および質量の変換 (4.18) には慣性座標系 S 内での質点の速度 (2.16) の速さおよび慣性座標系 S_1 内での質点の速度 (2.28) の速さを記述している．

$$E(v) = \frac{E_1(v_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (5.24)$$

$$m(v) = \frac{m_1(v_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (5.25)$$

ここで，(5.26）および（5.27）を仮定する．(5.21)，(5.26）および（5.27）を使用すると，速度（2.16）は（5.28）に記述できる．速度（5.28）の速さは（5.29）になる．慣性座標系 S 内の質点の速さ（5.29）では，その質点を慣性座標系 S 内で慣性座標系 S_1 の速さで移動しているものと扱える．

$v_y(t) = 0 \cdots (5.26)$

$v_z(t) = 0 \cdots (5.27)$

$\mathbf{v}(t) = u\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \cdots (5.28)$

$v = u \cdots (5.29)$

(5.26）を（5.22）の左辺に代入すると，(5.30）になる．(5.27）を（5.23）の左辺に代入すると，(5.31）になる．(5.20)，(5.30）および（5.31）を使用すると，速度（2.28）は（5.32）に記述できる．速度（5.32）の速さは（5.33）になる．慣性座標系 S_1 内の質点の速さ（5.33）は零で，その質点を慣性座標系 S_1 内で静止しているものと扱える．

$v_{y1}(t_1) = 0 \cdots (5.30)$

$v_{z1}(t_1) = 0 \cdots (5.31)$

$\mathbf{v}_1(t_1) = 0\mathbf{i}_1 + 0\mathbf{j}_1 + 0\mathbf{k}_1 \cdots (5.32)$

$v_1 = 0 \cdots (5.33)$

相対論的質量（2.35）に速さ（5.33）を代入すると，(5.34）になる．相対論的質量（5.34）の右辺は，質点の静止質量である．

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

$m_1 = m_0 \cdots (5.34)$

相対論的質量 (2.23) に速さ (5.29) および静止質量 (5.34) を代入すると，(5.35) になる．速さ (5.29)，速さ (5.33)

および静止質量（5.34）を，エネルギーの変換（5.24）に代入すると（5.36）になる．

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdots(2.23)$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(5.35)$$

$$E(u)=\frac{E_1(0)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(5.36)$$

（5.37）を使用すると，（5.38）を記述できる．このことを使用すると，エネルギーの変換（5.36）に（5.37）を代入して（5.36）はエネルギーの変換（5.39）になる．同様に，（5.38）を使用すると，（5.34）および（5.35）から慣性質量である静止質量（5.40）を記述できる．

$$u=0\cdots(5.37)$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=1\cdots(5.38)$$

$$E(0)=E_1(0)\cdots(5.39)$$

$$m=m_1=m_0\cdots(5.40)$$

（5.37）を使用すると，（2.1）および（2.2）は（5.41）および（5.42）になる．（5.41）および（5.42）では各慣性座標系は静止しているものと扱える．このように静止している慣性座標系Sおよび慣性座標系S_1内では，エネルギー（5.39）および静止質量（5.40）が成立する．ただし，アインシュタインの特殊相対性理論ではニュートン力学のように絶対的に静止している慣性座標系を認めてはいないものと一般に扱う．このことでは７章で簡単な考察をする．

$$\mathbf{u}_{S\_S1}=0\mathbf{i}_1,(u=\text{const.})\cdots(5.41)$$

$$\mathbf{u}_{S1\_S}=0\mathbf{i},(u=\text{const.})\cdots(5.42)$$

（5.43）を仮定する．（5.43）が成立することで，（5.44）および（5.45）が成立するものとする．（5.44）および（5.45）を使用すると，（4.6）および（4.18）から（5.46）および（5.47）が成立する場合がある．ただし，（5.44）～（5.47）は近似の式を意味する．

$$u\ll c\cdots(5.43)$$

$$1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\fallingdotseq 1\cdots(5.44)$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\fallingdotseq 1\cdots(5.45)$$

$$E(v)\approx E_1(v_1)\cdots(5.46)$$

$$m\approx m_1\cdots(5.47)$$

仮定（5.43）は，ニュートンの３つの運動の法則が成立するものと扱われている慣性座標系の速さでは満足する．２００８年現在ではニュートンの３つの運動の法則で使用する質量は定数となり，各慣性座標系内で等しいものとして扱われる．（5.47）の両辺の質量は相対論的質量である．相対論的質量は質点の速さに対応して異なる値になる．このように相対論的質量が変化するようでは，ニュートンの３つの運動の法則で使用する質量とは異なるものである．

ここで，(5.48) および (5.49) を仮定する．(5.48) から (5.50) が成立するものとする．同様に，成立 (5.49) から (5.51) が成立するものとする．(5.50) を使用すると，相対論的質量 (2.23) を (5.52) に記述できる場合がある．同様に，相対論的質量 (2.35) を (5.53) に記述できる場合がある．ただし，(5.50) ～ (5.53) は近似の式を意味する．

$$v \ll c \cdots (5.48)$$

$$v_1 \ll c \cdots (5.49)$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \fallingdotseq 1 \cdots (5.50)$$

$$\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}} \fallingdotseq 1 \cdots (5.51)$$

$$m \approx m_0 \cdots (5.52)$$

$$m_1 \approx m_0 \cdots (5.53)$$

相対論的質量 (5.52) および相対論的質量 (5.53) の右辺は，静止質量である．(5.52) および (5.53) では，各慣性座標系内の相対論的質量を静止質量に近似している．そして，一般的な解釈では，ニュートンの３つの運動の法則で使用する質量は，相対論的質量の静止質量として扱われることがある．このような解釈では，(5.52) および (5.53) の左辺の相対論的質量は，ニュートンの３つの運動の法則で使用する質量に近似している．

仮定 (5.48) および仮定 (5.49) は，ニュートンの３つの運動の法則が成立するものと扱われている慣性座標系の速さでは満足する．(5.52) および (5.53) が成立する相対論的質量の変換 (5.47) は，ニュートンの３つの運動の法則で使用する質量の変換に近似している場合がある．ただし，上述で説明をしたようにニュートン力学のような絶対的に静止している慣性座標系をアインシュタインの特殊相対性理論では認めていない．(5.52) および (5.53) が成立していても，このような慣性座標系に対する考え方が異なることは特徴的な観点のひとつである．

6　運動量の変換および運動量の成分-エネルギーの変換の導出

エネルギーの変換 (4.6) および質量の変換 (4.18) を使用して，運動量およびエネルギーの変換を導出できる．本章では２つの変換を導出する．最初に運動量の変換を導出する．最後に運動量の成分・エネルギーの変換を導出する．これらの呼称は著者が本書で使用するために与えた．

$$E(v) = E_1(v_1) \times \frac{1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, (u \neq c) \cdots (4.6)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18)$$

(4.6) および (4.18) では真空中の光の速さでも使用できる導出をしている．(a.3.2) および (a.3.4) を使用することで，真空中の光の速さで移動する質点の質量を記述できる．本章の以下の計算で使用しているエネルギーおよび質量は (a.3.1) ～ (a.3.4) で与えることができるものと仮定する．そして，２章で与えた質量およびエネルギーの記号を使用する．運動量の記号は２章で (2.20) ～ (2.22) および (2.32) ～ (2.34) で与えた．質点の全エネルギーの記号は相対論的質量を使用したもので，(2.27) および (2.39) を与えた．

$$p_x = m \cdot v_x \cdots (2.20)$$

$p_y = m \cdot v_y \cdots (2.21)$

$p_z = m \cdot v_z \cdots (2.22)$

$p_{x1} = m_1 \cdot v_{x1} \cdots (2.32)$

$p_{y1} = m_1 \cdot v_{y1} \cdots (2.33)$

$p_{z1} = m_1 \cdot v_{z1} \cdots (2.34)$

$E = m \times c^2 \cdots (2.27)$

$E_1 = m_1 \times c^2 \cdots (2.39)$

６章での運動量の変換を導出するのに速度の変換（3.15）～（3.17）を使用する．(3.15）は慣性座標系 S での速度ベクトルの x 軸成分である．(3.16）は慣性座標系 S での速度ベクトルの y 軸成分である．(3.17）は慣性座標系 S での速度ベクトルの z 軸成分である．

$v_x(t) = \dfrac{v_{x1} + u}{1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \cdots (3.15)$ 速度（2.16）の x 成分――速度の変換――

$v_y(t) = \dfrac{v_{y1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)} \cdots (3.16)$ 速度（2.16）の y 成分――速度の変換――

$v_z(t) = \dfrac{v_{z1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)} \cdots (3.17)$ 速度（2.16）の z 成分――速度の変換――

質量の変換（4.18）の両辺に（3.15）の左辺を掛けることで，(6.1）を記述できる．(6.1）の右辺に（3.15）の右辺を代入すると（6.2）になる．

$$m \cdot v_x(t) = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdot v_x(t) \cdots (6.1)$$

$$m \cdot v_x(t) = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{v_{x1} + u}{1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}\right) \cdots (6.2)$$

（6.2）の右辺を整理すると（6.3）になる．(6.3）の右辺の分子を展開すると（6.4）になる．

$$m \cdot v_x(t) = \frac{m_1 \cdot (v_{x1} + u)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.3)$$

$$m \cdot v_x(t) = \frac{m_1 \cdot v_{x1} + m_1 \cdot u}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.4)$$

（6.4）の右辺を（6.5）に書き換える．エネルギー（2.39）を使用すると（6.5）の右辺は（6.6）に書き換えることができる．

$$m \cdot v_x(t) = \frac{m_1 \cdot v_{x1} + \dfrac{m_1 \cdot c^2 \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.5)$$

$$E_1 = m_1 \times c^2 \cdots (2.39)$$

$$m \cdot v_x(t) = \frac{m_1 \cdot v_{x1} + \dfrac{E_1(v_1) \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.6)$$

（6.6）の左辺に運動量（2.20）を代入して，（6.6）の右辺に運動量（2.32）を代入すると（6.7）になる．（6.7）は運動量の変換の x 成分の式である．

$$p_x = m \cdot v_x \cdots (2.20)$$

$$p_{x1} = m_1 \cdot v_{x1} \cdots (2.32)$$

$$p_x(t) = \frac{p_{x1}(t_1) + \dfrac{E_1(v_1) \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.7)$$

（3.16）の左辺を質量の変換（4.18）の両辺に掛けることで（6.8）を記述できる．（6.8）の右辺に（3.16）の右辺を代入すると（6.9）になる．

$$v_y(t) = \frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)} \cdots (3.16)$$

$$m \cdot v_y = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdot v_y \cdots (6.8)$$

$$m \cdot v_y = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \dfrac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)} \cdots (6.9)$$

（6.9）の右辺を整理すると（6.10）になる．（6.10）の右辺に（2.12）を代入すると（6.11）になる．

$$m \cdot v_y = \frac{m_1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma} \cdots (6.10)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} (= \mathrm{const.}) \cdots (2.12)$$

$$m \cdot v_y = \frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot v_{y1}(t_1) \cdots (6.11)$$

（6.11）の右辺を整理すると（6.12）になる．運動量（2.21）および運動量（2.33）を（6.12）の両辺に代入すると（6.13）になる．（6.13）は運動量の変換の y 成分の式である．

$$m \cdot v_y = m_1 \cdot \cdot v_{y1}(t_1) \cdots (6.12)$$

$$p_y = m \cdot v_y \cdots (2.21)$$

$$p_{y1} = m_1 \cdot v_{y1} \cdots (2.33)$$

$$p_y(t) = p_{y1}(t_1) \cdots (6.13)$$

質量の変換（4.18）の両辺に（3.17）の左辺を掛けることで（6.14）を記述できる．（3.17）の右辺を（6.14）の右辺に代入することで（6.15）を記述できる．

$$v_z(t) = \frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)} \cdots (3.17)$$

$$m \cdot v_z = \frac{m_1 \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot v_z \cdots (6.14)$$

$$m \cdot v_z = \frac{m_1 \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)} \cdots (6.15)$$

（6.15）の右辺を整理すると（6.16）に記述できる．（6.16）の右辺に（2.12）を代入すると（6.17）になる．

$$m \cdot v_z = \frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma} \cdots (6.16)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} (= \mathrm{const.}) \cdots (2.12)$$

$$m \cdot v_z = \frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot v_{z1}(t_1) \cdots (6.17)$$

（6.17）の右辺を整理すると（6.18）になる．運動量（2.22）および運動量（2.34）を（6.18）の両辺に代入すると（6.19）になる．（6.19）は運動量の変換の z 成分の式である．

$$m \cdot v_z(t) = m_1 \cdot v_{z1}(t_1) \cdots (6.18)$$

$$p_z = m \cdot v_z \cdots (2.22)$$

$$p_{z1} = m_1 \cdot v_{z1} \cdots (2.34)$$

$$p_z(t) = p_{z1}(t_1) \cdots (6.19)$$

（2.39）を使用して，エネルギーの変換（4.6）の右辺を（6.20）に書き直す．（6.20）の右辺を整理すると（6.21）になる．

$$E_1 = m_1 \times c^2 \cdots (2.39)$$

$$E(v) = E_1(v_1) \times \frac{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, (u \neq c) \cdots (4.6)$$

$$E(v) = \frac{E_1(v_1) + m_1 \cdot c^2 \cdot \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.20)$$

$$E(v) = \frac{E_1(v_1) + m_1 \cdot v_{x1} \cdot u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.21)$$

運動量（2.32）を（6.21）の右辺に代入すると（6.22）になる．（6.22）は運動量の成分・エネルギーの変換である．

$$p_{x1} = m_1 \cdot v_{x1} \cdots (2.32)$$

$$E(v) = \frac{E_1(v_1) + p_{x1}(t_1) \cdot u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.22)$$

本章では，以下の変換を導出した（6.7），（6.13）および（6.19）は運動量の変換である．（6.22）は運動量の成分・エネルギーの変換である．本章の導出では，真空中の光の速さの場合でも使用できる．

$$p_x(t) = \frac{p_{x1}(t_1) + \frac{E_1(v_1) \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.7)$$

$$p_y(t) = p_{y1}(t_1) \cdots (6.13)$$

$$p_z(t) = p_{z1}(t_1) \cdots (6.19)$$

$$E(v) = \frac{E_1(v_1) + p_{x1}(t_1) \cdot u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (6.22)$$

7　静止質量と質量の変換についての考察

本書の最終章全体では，４章で導出したエネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）よりも一般的な記述のエネルギーの変換および質量の変換を導出する．本書では静止質量を（3.7）で定義した．そのような静止質量の定義（3.7）を与えて理論を構築することは，一般的な特殊相対性理論の指導には一致しないものと著者は経験から判断する．

$$E(v) = E_1(v_1) \times \frac{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, (u \neq c) \cdots (4.6)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18)$$

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \leq v \leq c) \cdots (3.7)$$

静止質量の定義（3.7）では真空中の光の速さ（2.6）で使用できる質量（3.8）を仮定している．このことで，静止質量を真空中の光の速さ（2.6）で計算できることになる．さらに，真空中の光の速さの場合での質点の質量を使用でき，質点の全エネルギーおよび運動量を考えることができる．これらのことで，エネルギーの変換（4.6）および質量の変換（4.18）を真空中の光の速さで使用できるようになる．質量（3.8）を仮定することは７章２節で考察している．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$m(v), (0 \leq v \leq c) \cdots (3.8)$$

このようなことからも，著者の独自の試みとしての本書の理論では静止質量の扱い方を問題とする．静止質量について考察する過程で既知であるニュートン力学と比較して特殊相対性理論の運動量に観点を置いて考察をする．

ニュートン力学では，絶対時間と呼ばれるものを仮定している．絶対時間は外部からの影響を一切受けない時間であり，すべての空間で等しいものと扱うことができる．このことから，ニュートン力学では絶対空間およびすべての慣性座標系の各位置に仮定できる時計の時間の進みの速さは等しいものと扱うことができる．絶対静止することを仮定することでは，絶対に動かないことを仮定している．速度を定義することはしないで，絶対に動かないことを仮定する方法を使用して絶対静止を論じている．速度は，座標系の座標を使用して定義されるものであり，座標系を仮定する絶対空間を仮定する前に速度を導入することはできない．このために，時間の進みの速さは問題にすることなく絶対静止を仮定することになる．特殊相対性理論では絶対空間を仮定していても絶対時間を仮定する必要はない．

特殊相対性理論では，時間および絶対空間を仮定している．これらの仮定は特殊相対性原理および光速度の不変の原理を与える際に導入されているものと考えることができる．絶対空間は，２０１０年現在のニュートン力学の一般論では物理学的意味として実在することは否定される．このように否定される絶対空間は，慣性の法則が成立する座標系として与える慣性座標系を定義する際に使用できる．ニュートン力学で使用する慣性座標系は等速度運動をする．質点が等速度運動することは，座標系で観測することで認めることになる．互いに等しい加速度で運動している２つの質点は互いに静止あるいは等速度運動していることをニュートン力学では説明できる．２０１０年現在のニュートン力学の理論で定義する等速度運動では，質点が絶対的に等速度運動していることを論じる際に絶対に動かない慣性座標系が必要になるものと扱

える．そのように使用する絶対に動かない慣性座標系をニュートン力学での絶対空間内に仮定しているものと扱うことができる．絶対空間は外部からの影響を受けないものである．絶対空間が外部からの影響を一切受けないことから，絶対空間に静止し続ける各座標軸上の長さは変化することはないものと考えられる．この絶対空間内に仮定した静止し続ける慣性座標系の各軸の長さは撓むことなく一定の長さである．その絶対空間上で質点が等速度運動していることを仮定して，等速度運動する慣性座標系を定義する．或る慣性座標系から他の慣性座標系を観測すると等速度運動していることを観測できる．或る慣性座標系から同じ等速度運動する他の慣性座標系を観測すると静止しているものと観測できる．このように等速度運動している慣性座標系を使用した考察では静止は２つの慣性座標系間での相対的な状態である．このことから，絶対空間のように絶対に動くことがない絶対的な静止を仮定することはニュートン力学上では実在しない現象であるものと考えることができる．上述のように絶対的に等速度運動していることを仮定するために絶対空間を導入する必要性が生じており，絶対空間を排除しきれないことが生じている．絶対的に等速度運動していることを仮定するために絶対空間に導入した慣性座標系の必要性は等速度の定義に依存している．等速度の定義を物理量の‘長さ’および‘時間’のみで与えるならば，絶対空間内で等速度を観測する長さを測るメジャーおよび時間を測る時計のみで等速度運動を観測できる．一般の物理学理論では速度を定義して，等速度を定義する．そのような一般の速度の定義は慣性座標系を仮定して与えているものである．このために，絶対空間に慣性座標系を仮定する必要が生じる．

特殊相対性原理：すべての慣性座標系で，物理法則は同じである．
光速度の不変の原理：すべての慣性座標系で真空中の光の速さはその光源の運動の状態で決定しないで定数であり，真空中の光の速度は等速度である．

ニュートン力学での相対性原理は，絶対時間を使用するために特殊相対性理論では使用できないことになる．特殊相対性理論では，ニュートン力学の相対性原理の代わりに特殊相対性原理を導入する．特殊相対性原理ではすべての慣性座標系で物理法則は同じであることを仮定している．このように物理法則を特殊相対性原理では導入しているので時間も仮定していることになる．特殊相対性原理から特殊相対性理論で使用する慣性座標系の各軸が撓むことのないことを仮定する．特殊相対性原理で使用する慣性座標系にも等速度で移動することを仮定している．慣性座標系が等速度で移動していることは，ニュートン力学の考察と同様に絶対空間を使用して仮定することができる．特殊相対性原理を使用すると上述のように絶対空間に慣性座標系を仮定する必要は生じる．等速度運動は，上述のように‘長さ’および‘時間’で観測することはできる．このことから，特殊相対性理論では特殊相対性原理を使用しないで絶対空間に等速度の考えを導入する方法を採用するならば絶対空間に慣性座標系を仮定する必要はない．その絶対空間での等速度の考えは，特殊相対性原理を導入する際には放棄して特殊相対性原理で採用できる等速度の定義を採用することになる．特殊相対性原理では慣性座標系に使用する時点の進みの速さを決定できない．特殊相対性理論ではニュートン力学には存在しなかった原理として光速度の不変の原理を導入している．光速度の不変の原理を使用すると特殊相対性理論で使用する時空での時点の進みの速さを決定できる．これらのことから，特殊相対性理論で使用する４次元の時空は撓むことのない時空であることになる．

このような４次元の時空ではローレンツ変換を使用して各慣性座標系での物理量の変換を説明できる．ニュートン力学ではガリレイ変換を使用して各慣性座標系での物理量の変換を説明できる．２０１０年現在では，アインシュタインの特殊相対性理論およびニュートン力学でも絶対空間内に仮定している絶対静止した慣性座標系は実在しないものと扱う．このような解釈で，ローレンツ変換およびガリレイ変換では絶対静止した慣性座標系は変換する対象となる慣性座標系には含まない扱いをすることができる．

ニュートン力学では，絶対空間および絶対時間を使用してガリレイ変換が成立する慣性座標系を使用する．ガリレイ変

換ではすべての慣性座標系で加速度は不変量である．そのような加速度でニュートン力学の質点の速度を計算できる．その質点の加速度を使用して慣性座標系の速度を計算することになる．この考えでは，ニュートン力学では各慣性座標系の等速度の速さは無限大の速さまで許容する．そのようなニュートン力学の加速度および速度の影響を絶対時間は受けることはない．この意味では，すべての慣性座標系上で質点のどのような運動に対しても同じ時間の進みを絶対時間には保証している．特殊相対性理論では加速度は各慣性座標系での不変量にはならない．特殊相対性理論で使用する図 7.1.1 の時計で計算する時間の進みの速さはローレンツ変換の時点の式からも明らかなように質点の運動の影響を受ける．ローレンツ変換では真空中の光の速さを超えることを仮定すると，ローレンツ変換の係数（2.12）に虚数が現れる．このために，一般にはローレンツ変換を使用した特殊相対性理論では質点の速さは真空中の光の速さを超えることはできないものと扱われる．

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(= \mathrm{const.})\cdots(2.12)$$

質点の速さが真空中の光の速さを超えることができないことで慣性座標系の速さも真空中の光の速さを超えないものとなる．真空中の光の速さで移動する慣性座標系を仮定しても，光速度の不変の原理を使用すると真空中の光が静止できる慣性座標系は仮定できない．光速度の不変の原理の導入で，時計の時間の進みの速さを真空中の光の速さおよび真空中の光の移動距離を使用して（7.1）で決定することになる．その光の移動距離（7.1）は撓まない４次元の時空での慣性座標系内の移動距離である．光速度の不変の原理を満足することから真空中の光の移動距離が零（7.2）になることで（7.3）を記述できる．（7.3）から（7.4）を得る．（7.4）では時間が零になり，時間の進みが無いことを示しているものと考えることができる．もし，慣性座標系Ｓ$_1$が真空中の光の速さで移動すると，その慣性座標系Ｓ$_1$内の各位置に静止しているものと仮定されている時計も一緒に移動する．その移動のために各時計は真空中の光の速さで移動する．その時計が移動する慣性座標系Ｓ内では光は時計から送り出された方向に速度の成分を持つことになる．ここで，慣性座標系Ｓ内では光は時計の移動方向――水平方向になるものとする．――に真空中の光の速さを持ち，時計から送り出された方向――垂直方向になるものとする．――にも速度の成分を持つことを仮定する．その慣性座標系Ｓ内で光は真空中の光の速さで移動することができない．この仮定での水平方向および垂直方向の各速度ベクトルの成分のベクトル和の大きさを計算すると，真空中の光の速さより大きくなる．このために，光速度の不変の原理を使用すると時計からは光が送り出されないことで（7.2）を記述できる．この場合では，その時計では（7.2）を満足して（7.4）になる．

$c \cdot \Delta t = \Delta r \cdots (7.1)$ 真空中の光の移動距離

$\Delta r = 0 \cdots (7.2)$

$c \cdot \Delta t = 0 \cdots (7.3)$

$\Delta t = 0 \cdots (7.4)$

真空中の光の速さは定数である．このことから，その時計で計算する時間の式は（7.5）で記述できる．（7.5）は（7.1）を書き直すことで得る．真空中の光が時計から送り出されなくても，時計では（7.5）で時間を計算するものと仮定する．このために，（7.2）の場合に（7.3）を記述できる．この議論では，その時計内での光の移動距離は関数（7.6）で計算できる場合を仮定している．

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{c}\cdots(7.5)$$

$$r(t) = \sqrt{(c \cdot t)^2}\cdots(7.6)$$

真空中の光が静止する慣性座標系を得られないことで，その光の静止質量を与えることは困難になる．一般には，特殊相対性理論の静止質量は質点が静止している座標系で観測する慣性質量となる．慣性座標系Ｓ上を真空中の光の速さで移動する慣性座標系S_1の時間の進みが無いならば，静止エネルギーを観測する際に時間を使用できないことが考えられる．そのように静止エネルギーが観測できない場合で，真空中の光の速さで移動する質点の静止質量の値を決定する方法を考えることになる．本書の特殊相対性理論では，真空中の光の速さで移動する質点の静止質量を定義することを試みた．(3.7) は，その静止質量の定義である．(3.7) は，質量を定義しているものではない．質量は (3.8) で仮定しており，本書の特殊相対性理論では定義していない．本書では，質点の全エネルギー (a.3.1) を使用して質量 (a.3.2) を計算する．そのように導出できる質量 (a.3.2) を (3.8) として扱い，静止質量 (3.7) を定義している．このような (3.7) は質量 (3.8) を静止質量に変換する式であるものと解釈できる．光のエネルギーを観測する際に時間を使用することについての考察は７章１節の最後の方で説明をする．

$$m_0 \equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0 \le v \le c)\cdots(3.7)$$

$$m(v),(0 \le v \le c)\cdots(3.8)$$

(3.7) のように静止質量を定義することで，質量の変換およびエネルギーの変換を真空中の光の速さで移動する質点にも使用できるものと著者は２０１０年現在考えている．さらに，特殊相対性理論での運動量および運動方程式を真空中の光の速さで移動する質点に使用できるものと著者は考えている．著者の経験では，それらの式が真空中の光の速さで移動する質点には明らかに使用できない導出をしているものがある．そのような導出での上述の式では真空中の光の速さを使用すると分母が零になってしまうことを著者は覚えている．分母が零にならないで，それら上述の式が使用できる導出方法を著者の考察で独自に与えた．このような解釈では，本書のそのような部分は著者の試みである．

７章１節では特殊相対性理論で使用する時計について考察して上述の時間の進みの速さについて考える．７章２節では，４次元の時空で計算できる時計の相対性について考察する．７章３節では，静止質量の定義 (3.7) を使用した運動量についての考察をする．７章４節では，特殊相対性理論での４次元の時空の座標を使用した運動量およびエネルギーの関係について考察する．ここでは，静止質量の式 (3.7) を導出する．７章５節では，７章４節の計算を使用してエネルギーの変換および質量の変換を導出する．７章５節の変換は４章で導出した変換よりも一般化したものであるものと著者は考えている．

7.1 特殊相対性理論での慣性座標系で使用する時計

７章１節では，特殊相対性理論で使用する時計について考察する．この考察で使用する時計は，著者のイメージで創造したものである．

図 7.1.1 は，本書の特殊相対性理論の時計の図である．図 7.1.1 の時計は，建造物，その中にある送信機および受信機で構成されることを仮定する．図 7.1.1 には受信機の絵は描いていない．送信機は，建造物内の円柱状のものである．その送信機から光が真空中の光の速さで送り出されるものとする．図 7.1.1 の水平方向をｘ軸とし，垂直方向をｙ軸とする．建造物の中は真空であるものと仮定する．光を送信機から送り出す角度は，図 7.1.1 の建造物の床上でｘ軸の正の方向になる位置から測って０°から１８０°まで自由に調整できるものとする．正確に図 7.1.1 の時計で時間を測るには，９０°の向きとなる垂直上方に光を送り出すものとする．

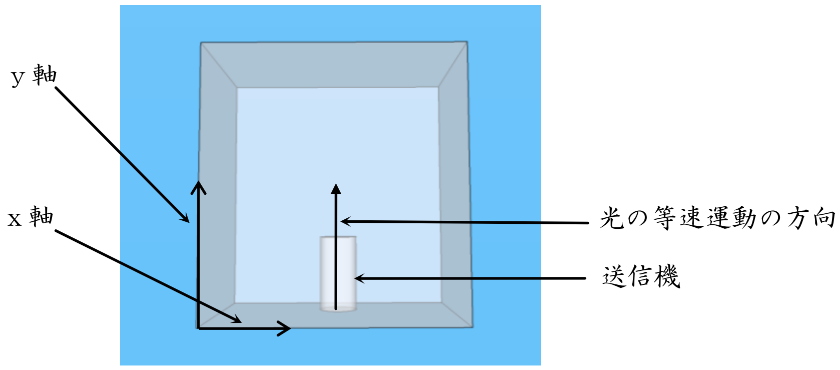

図 7.1.1　建造物，送信機および受信機で構成した時計

図 7.1.1 の送信機から光が真空中の光の速さ（2.6）で垂直上方に送り出された際に，その光が垂直上方に移動した距離を（7.1.1）で記述する．その光が距離（7.1.1）だけ移動する時間を（7.1.2）で記述する．(2.6)，(7.1.1）および（7.1.2）の関係は（7.1.3）になる．(7.1.3）は（7.1.4）に書き直すことができる．(7.1.4）の左辺は真空中の光りの移動時間（7.1.2）である．

$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\times\varepsilon_0}},(c\neq 0,c>0)\cdots(2.6)$

$\Delta y\cdots(7.1.1)$ 真空中の光の移動距離

$\Delta t\cdots(7.1.2)$ 真空中の光が移動する時間

$\Delta y=c\cdot\Delta t\cdots(7.1.3)$ 真空中の光の移動距離と時間の関係

$\Delta t=\frac{\Delta y}{c}\cdots(7.1.4)$ 時計の時間

（7.1.4）では，建造物の中が真空であるので光は（2.6）で送信されることを意味する．(2.6）は時計で示す時間を計算するための式として扱う．図 7.1.1 の時計となる建造物の中の各位置には見えない受信機があるものと仮定する．光が建造物の中の各位置に到達した時点で，その建造物の中に在る各受信機で光が到達したことを受信する．受信機の在る座標を使用して，図 7.1.1 の時計内の垂直方向での距離（7.1.1）をユークリッド空間での２点間の距離とする．垂直方向での距離（7.1.1）の値を使用して，(7.1.4）から建造物の中の各位置に光が到達した時間を計算する．

図 7.1.1 の時計は特殊相対性理論で使用する４次元時空の時点の進みとは独立しているものではない．その４次元時空の時点の隔たりを意味する時間は，時計内の光が移動しないことでは零になる．真空中の光の速さに反比例して真空中の光が移動する時間の長短は決定する．真空中の光が移動する時間の長短は，その４次元時空の時間の長短になる．図 7.1.1 の時計は水平方向――x 軸方向のこと．――のみに移動できるものとする．この移動方向のために，垂直方向の座標の距離――y 軸方向の距離のこと．――は x 軸方向への時計の移動速度の影響で変化することはないものと扱える．本書では，光の速度ベクトルを考えることは光を質点として扱うことを意味する．電磁気学の計算で，光の運動量を計算できる．このことからも理論上は光を質点として考えることはできる．

次に，光を波として考えて真空中の光の波長（7.1.5）を扱う．ここで仮定している光の波には，振動数（7.1.6）を仮定する．光の波は真空中の光の速さで伝搬することから（7.1.7）の関係を満足する．(7.1.6）の振動数から，その光の波の周期は（7.1.8）になる．

$\lambda\cdots(7.1.5)$ 真空中の光の波長

$\nu\cdots(7.1.6)$ 真空中の光の振動数

$c = \nu \cdot \lambda \cdots (7.1.7)$

$T = \dfrac{1}{\nu} \cdots (7.1.8)$

図 7.1.1 の時計の光が 1 波長分の距離だけ移動することを仮定する．このことは，(7.1.9) で記述できる．(7.1.9) を (7.1.4) の分子に代入すると（7.1.10）を記述できる．

$\Delta y = \lambda \cdots (7.1.9)$

$\Delta t = \dfrac{\lambda}{c} \cdots (7.1.10)$

（7.1.10）の分母に（7.1.7）を代入すると，（7.1.11）になる．（7.1.11）は（7.1.12）に記述できる．（7.1.8）を使用すると，（7.1.12）は光の波の周期（7.1.13）に書き直せる．

$\Delta t = \dfrac{\lambda}{\nu \cdot \lambda} \cdots (7.1.11)$

$\Delta t = \dfrac{1}{\nu} \cdots (7.1.12)$

$\Delta t = T \cdots (7.1.13)$

（7.1.12）からは，光の振動数が小さくなると時間（7.1.12）は大きくなる．このことは，時計の光の周期（7.1.8）が大きくなることを意味する．図 7.1.1 の時計の中は真空であるので，光の速さは真空中の光の速さ（2.6）で定数である．（7.1.7）から，振動数が小さくなるならば波長が長くなるものと考えることができる．（7.1.9）で示したように光が進む距離が大きくなることで，光が移動する時間（7.1.13）が長くなることは明らかである．光の振動数が（7.1.14）のように異なる場合でも (7.1.15) の関係を満足する．真空中の光の波長 (7.1.15) の分母に (7.1.14) を代入すると (7.1.16) になる．（7.1.16）の分子に（7.1.7）を代入すると（7.1.17）になる．（7.1.17）は真空中の光の波長（7.1.18）に書き直すことができる．振動数（7.1.14）が α 倍になると，その光の波長は（7.1.18）のようになる．関係（7.1.7）を保存するために（7.1.14）および（7.1.18）の関係が生じることから，図 7.1.1 の光は特定の振動数である必要はない．

$\nu_1 = \alpha \cdot \nu \cdots (7.1.14)$

$\lambda_1 = \dfrac{c}{\nu_1} \cdots (7.1.15)$

$\lambda_1 = \dfrac{c}{\alpha \cdot \nu} \cdots (7.1.16)$

$\lambda_1 = \dfrac{\nu \cdot \lambda}{\alpha \cdot \nu} \cdots (7.1.17)$

$\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{\alpha} \cdots (7.1.18)$

図 7.1.1 の時計は，送信機から送り出す光の振動数および波長に関係なく時間を計算できる．光速度の不変の原理を使用することで，真空中の光の速さは真空中の時計の時間の長短には影響を受けずに一定である．真空中の光の移動距離が異なることで，真空中の光の移動時間が異なる．このように真空中の光の 1 波長分の移動時間が異なることで，真空中の光の波長が異なることを計算できる．ローレンツ変換の時点の変換（2.11）では，時間の変換を計算できる．

$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \dfrac{u \cdot x}{c^2} \right) \cdots (2.11)$

図 7.1.1 の時計で正確に時間を観測するには，図 7.1.1 の建造物の床に対して垂直方向に光を送り出す必要があった．もし，そのような垂直方向から送信機で送り出す光の角度がずれるならば真空中の光の移動距離の観測結果が異なる．そのように異なる結果は，図 7.1.1 の時計では建造物の床から垂直方向の線分となる距離で光の移動距離を記述するためである．光が進む角度は各慣性座標系で異なる角度になることをローレンツ変換の時点の変換（2.11）を使用して導出できる．図 7.1.1 の時計の送信機から送り出された光の角度は他の慣性座標系での角度に変換される．このことで，他の慣性座標系内で静止している図 7.1.1 の時計の送信機から送り出される光の角度を，その変換で与えられる角度に一致させる．そのように垂直方向からずれた方向に光を送り出すことは，その送り出された光の移動距離とは異なる光の垂直方向の移動距離を観測することを意味する．そのような移動距離の観測でのずれは真空中の光の正弦の変換で変換式として記述できる．このことでは，各慣性座標系で観測できる光の波長が異なることを導出できる．著者が独自に与えた付録ｖの波長についての考察で，そのような計算を説明して波長の変換の式を導出している．付録ｖでは，真空中の光の正弦の変換をローレンツ変換の時点の変換から導出している．

光の運動量を扱う際には，光を質点として扱うことが必要である．２０１０年現在の一般的な物理学では，光を構成している粒子を説明するにはアインシュタインが提案したものと報告される光子を使う．電磁気学で計算できる光の運動量は，その光子を導入することで光の粒子の運動量で存在するものと考える．光子の計算は，特殊相対性理論での計算から導出されたものではない．ここでは，その光子を導入した計算を扱い光の振動数が慣性座標系で異なることを示す．このことでは，波長の変換を示すものと扱える．そのような振動数の変換を特殊相対性理論から導出する一般的な計算は本書では扱わない．付録ｖの考察で，著者が導出した波長の変換から振動数の変換も導出できることを説明している．

光子を光のエネルギーが集中して，小さな塊として振る舞う粒子として扱う．光子の持つエネルギーは（7.1.19）で記述できる．ここでの計算では，（7.1.19）のエネルギーは光子の持つ全エネルギーとして扱うことができることを仮定する．（7.1.19）の光子は，振動数（7.1.6）の光の粒子である．同様に，振動数（7.1.14）の光の粒子では，全エネルギー（7.1.20）を持つものと考える．（7.1.19）および（7.1.20）の右辺に記述してある定数はプランク定数（7.1.21）と呼ばれるものである．文献１２で，光子については説明をした．

$E(c)=h\cdot\nu\cdots(7.1.19)$ 光子の持つエネルギー

$E_1(c)=h\cdot\nu_1\cdots(7.1.20)$ 光子の持つエネルギー

$h=6.62606896\times10^{-34}\ \mathrm{J\,s}\cdots(7.1.21)$ プランク定数

（7.1.19）は慣性座標系 S――図 7.1.1 の時計が移動している慣性座標系のことである．――で観測した質点の持つ全エネルギーである．（7.1.20）は慣性座標系 S_1――図 7.1.1 の時計が静止している慣性座標系のことである．――で観測したもので質点の持つ全エネルギーある．（4.11）には光のエネルギーの変換として説明をした．（4.11）の両辺に（7.1.19）および（7.1.20）を代入すると（7.1.22）になる．

$$E(c)=E_1(c)\times\frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.11)$$

$$h\cdot\nu = h\cdot\nu_1\times\frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(7.1.22)$$

（7.1.22）の両辺にはプランク定数（7.1.21）を記述している．そのプランク定数は（7.1.19）および（7.1.20）では共通の定数である．それぞれの光のエネルギーを決定するのは（7.1.19）および（7.1.20）では振動数であることは明らかである．このような考えでは，エネルギーの変換（7.1.22）から振動数の変換（7.1.23）を導出できる．

$$\nu = \nu_1\times\frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(7.1.23)$$光の振動数の変換

図 7.1.1 の時計内の送信機から送り出される光が，x 軸に対して直角になる方向に送り出されるものと仮定する．この条件は（7.1.24）になる．（7.1.24）では余弦（7.1.25）になる．（7.1.25）を（7.1.23）に代入すると（7.1.26）を記述できる．慣性座標系 S での光の波は（7.1.7）を満足し，慣性座標系 S_1 での光の波は（7.1.27）を満足することを仮定する．

$$\theta_{x1} = \frac{\pi}{2}\cdots(7.1.24)$$

$$\cos\theta_{x1} = 0\cdots(7.1.25)$$

$$\nu = \nu_1\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(7.1.26)$$

$$c = \nu\cdot\lambda\cdots(7.1.7)$$

$$c = \nu_1\cdot\lambda_1\cdots(7.1.27)$$

（7.1.7）および（7.1.27）の振動数を（7.1.26）の両辺に代入すると（7.1.28）を記述できる．（7.1.28）から（7.1.29）を得る．（7.1.29）では，移動している時計の送信機から送り出された光の波長は収縮することを示している．

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_1}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(7.1.28)$$

$$\lambda = \lambda_1\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdots(7.1.29)$$移動している時計の光の波長は収縮する．

上述のように慣性座標系 S_1 および慣性座標系 S での図 7.1.1 の時計の光は，一般には異なる波として考えることができる．それぞれの慣性座標系での光は，光速度の不変の原理を使用するために等速度運動をする質点として扱うことになる．慣性運動とみなせる光の等速度運動について考察して各慣性座標系の時間について考察する．

図 7.1.2.a から図 7.1.2.c の順序で，図 7.1.1 の時計の送信機から光が送り出された後の光の慣性運動を示しているものとする．図 7.1.2.d で真空中の光の速度ベクトルを示すものとする．図 7.1.2.d のベクトルの大きさは（2.6）である．図 7.1.2.d の光の速度ベクトルを，図 7.1.2.a から図 7.1.2.c に示した．図 7.1.2.a から図 7.1.2.c での光の速度ベクトルの和は図 7.1.2.e のように示すことができる．

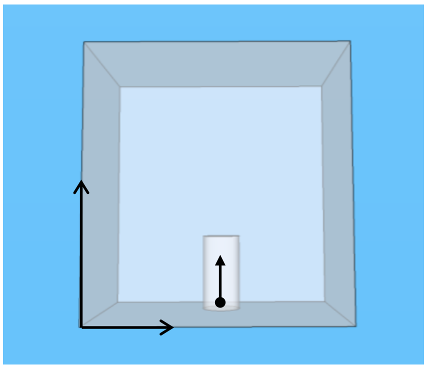
図 7.1.2.a　静止した時計の光の移動

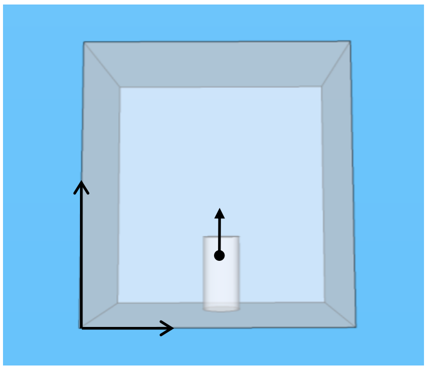
図 7.1.2.b　静止した時計の光の移動

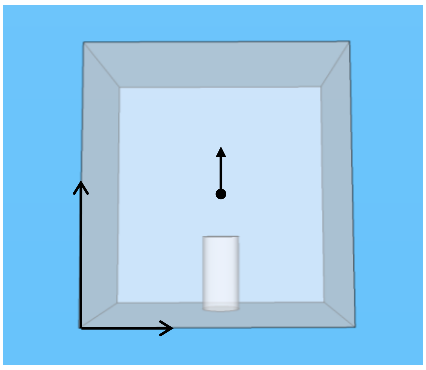
図 7.1.2.c　静止した時計の光の移動

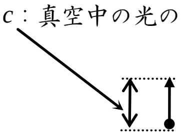

図 7.1.2.d　光の速度ベクトル

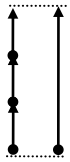
図 7.1.2.e　光の速度ベクトルの和

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\times\varepsilon_0}},(c\neq 0,c>0)\cdots(2.6)$$

図 7.1.1 の時計の送信機から送り出された光の位置は図 7.1.2.a から図 7.1.2.c に示してある図 7.1.2.d のベクトルの始点の黒丸で示すものとする．時計内の光が図 7.1.2.a から図 7.1.2.c の光の位置まで移動する時間は（7.1.30）で記述する．

Δt_{s1} s$\cdots(7.1.30)$

光速度の不変の原理から時計内の光は真空中の光の速さ（2.6）で等速度運動をする．特殊相対性原理を使用すると，その光の y 軸方向の移動距離は（7.1.31）で記述できる．

$\Delta r_{s1}=c\times\Delta t_{s1}$ m$\cdots(7.1.31)$ y 軸方向の光の移動距離

真空中の光の移動距離 (7.1.31) を真空中の光の移動時間 (7.1.32) に書き直すことができる．図 7.1.1 の時計では (7.1.32) を使用して，時間を計算することになる．

$$\Delta t_c=\frac{\Delta r_c}{c}\text{ s}\cdots(7.1.32)$$

光速度の不変の原理から光の移動時間（7.1.32）は光の移動距離（7.1.31）の値で決定することになる．光の移動距離が異なる値になる場合は，光の移動時間（7.1.32）は異なる値になることは明らかである．その光の移動時間（7.1.32）が異なる値になることで時計の時間は異なる時間を示すものと考えることができる．

慣性座標系 S 内で図 7.1.1 の時計が等速度運動しているものと仮定する．その等速度の大きさは（7.1.33）である．時計は慣性座標系 S_1 内に静止しているものとする．その時計は慣性座標系 S_1 の等速度運動で慣性座標系 S 内を移動する．図 7.1.3.a から図 7.1.3.b の順序で，慣性座標系 S 内での図 7.1.1 の時計内の送信機から送り出された光の慣性運動を示しているものとする．図 7.1.2.d の場合と同様に図 7.1.3.c の黒丸で光の位置を示すものとする．光速度の不変の原理を使用すると，図 7.1.3.c のベクトルの大きさは真空中の光の速さ（2.6）である．図 7.1.3.d では，図 7.1.3.c の速度ベクトルの成分を表示している．図 7.1.3.d では，x 軸方向の速度ベクトルは慣性座標系 S_1 の等速度ベクトルである．図 7.1.3.d の各ベクトルにはピタゴラスの定理（7.1.34）を記述できる．ピタゴラスの定理（7.1.34）から y 軸方向の光の速さは

（7.1.35）で記述できる．

$v_x \cdots (7.1.33)$ 慣性座標系 S 内での x 軸方向の光の速さ

$c^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 \cdots (7.1.34)$

$v_y = \sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdots (7.1.35)$ 慣性座標系 S 内での y 軸方向の光の速さ

図 7.1.3.e では，図 7.1.3.a から図 7.1.3.b までの速度ベクトルの和を示している．図 7.1.3.e の x 軸方向のベクトルの大きさはすべて（7.1.33）である．図 7.1.3.e の y 軸方向のベクトルの大きさはすべて（7.1.35）である．

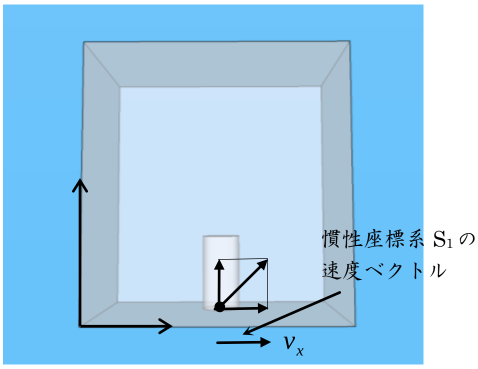

図 7.1.3.a　時計が移動している慣性座標系 S から観測した光の速度ベクトル

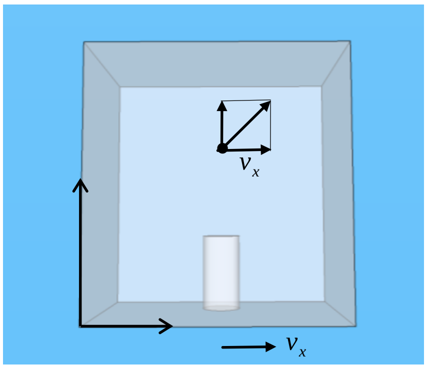

図 7.1.3.b　時計が移動している慣性座標系 S から観測した光の速度ベクトル

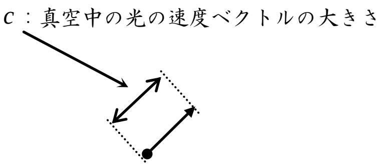

図 7.1.3.c　慣性座標系 S から観測した光の速度ベクトル

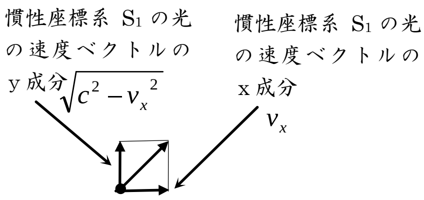

図 7.1.3.d　慣性座標系 S での光の速度ベクトルの成分

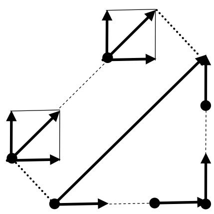

図 7.1.3.e　慣性座標系 S から観測した光の速度ベクトルの和

垂直方向に光を送り出す送信機が静止している図 7.1.1 の建造物――慣性座標系 S_1 内に存在する．――の中では，光速度の不変の原理からその光は垂直方向に等速度運動をする．その建造物が水平方向に速さ（7.1.33）で等速度運動している慣性座標系 S 内では，光は水平方向に建造物と同じ速さ（7.1.33）で移動している．その光は送信機から垂直上方に送り出されたものであるので垂直上方に（7.1.35）で移動している．そして，その光の水平方向の速度と光の垂直上方の速度とのベクトル和が成立することが図 7.1.3.d で説明できる．光速度の不変の原理から，慣性座標系 S 内ではそのベクトル和で記述する速度の光は図 7.1.3.e のように右上の斜め方向に真空中の光の速さで等速度運動する．

慣性座標系 S 内での時計の送信機から送り出された光の移動時間を（7.1.36）で記述する．（7.1.36）は慣性座標系 S 内の各位置で静止し続けている図 7.1.1 の時計の時間であるものとする．慣性座標系内の各位置に静止し続けている時計は，それぞれ同期がとられており一致する時間および時点を示すことができるものと仮定する．この仮定では，その慣性座標系の各位置で静止し続けている図 7.1.1 の時計の垂直方向で計算できる真空中の光の移動距離はすべて等しいものとして扱うことになる．このことから，特殊相対性理論で x 軸方向に等速度運動する慣性座標系では，y 軸および z 軸は撓まない軸であるものと扱うことになる．そのような x 軸方向に等速度運動する慣性座標系で 3 つの軸をそれぞれ重ねた場合を仮定する．その場合では，2 つの互いに撓まない軸――図 7.1.1 では y 軸どうしで考える．――上の各

点が互いに静止しているならば，それらの軸上の 2 点間の距離は等しいものと計算できる．図 7.1.1 の時計では，２つの慣性座標系の y 軸方向での距離が等しくなることで時間を計算するのに応用できる．x 軸については次のように考えることができる．光速度の不変の原理を使用することで，真空中の光の移動時間が等しいことで真空中の光の移動距離を等しく計算できる．そのような真空中の光を使用して慣性座標系での x 軸上の目盛りの長さを測ると，その x 軸は撓まないことが特殊相対性理論では明らかである．それぞれの位置に静止している時計の進みがばらばらで時点の同期が取れていない場合や光速度の不変の原理が成立しない場合では軸の撓みを示す計算が生じる．

そのように y 軸方向の長さが不変である場合を応用して次のように時間関係を計算できる．特殊相対性原理を使用すると，慣性座標系 S 内で定数である y 軸方向の速さ（7.1.35）で移動している光の移動距離は（7.1.37）で記述できる．

$\Delta t_s \cdots (7.1.36)$ 慣性座標系 S 内で等速度運度している時計の光の移動時間

$\Delta r_s = \sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdot \Delta t_s \cdots (7.1.37)$ 慣性座標系 S 内での y 軸方向の移動距離

慣性座標系 S_1 は慣性座標系内を x 軸方向に等速度で移動しているので，y 軸および z 軸方向の座標軸上の長さは慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 では上述のように等しい．このことを使用すると，(7.1.38) が成立する．(7.1.38) の左辺に（7.1.31）を代入して，(7.1.38) の右辺に（7.1.37）を代入して（7.1.39）を記述できる．

$\Delta r_s = \Delta r_{s1} \cdots (7.1.38)$

$\sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdot \Delta t_s = c \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.39)$

（7.1.39）は（7.1.40）に書き直すことができる．(7.1.40) を（7.1.41）に整理することができる．(7.1.41) の左辺は，慣性座標系 S 内での時計の光の移動時間である．(7.1.41) では，慣性座標系 S_1 内での時計の光の移動時間は慣性座標系 S 内での時計の光の移動時間とは異なることを示している．

$$\Delta t_s = \frac{c}{\sqrt{c^2 - {v_x}^2}} \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.40)$$

$$\Delta t_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.41)$$

（7.1.41）で説明するように各慣性座標系で真空中の光の移動時間が異なることで，各慣性座標系での時計の示す時間が異なることになる．一般的な時間の変換として扱うことができる式はローレンツ変換で導出できる．そのような時間の変換は，<u>質点の移動距離を考慮したものである</u>ことはローレンツ変換の時点の式からも明らかである．

図 7.1.2.e のベクトルの大きさは図 7.1.3.e のベクトルの大きさとは異なる．この説明のために，図 7.1.3.d を図 7.1.4 のように描き直す．図 7.1.3.e のベクルの大きさは（7.1.42）で記述できるものとする．図 7.1.4 の垂直成分は（7.1.42）を使用すると (7.1.43) で記述できる．(7.1.43) の左辺の正弦は (7.1.44) になることは図 7.1.4 から明らかである．(7.1.43) の右辺を整理すると（7.1.45）に記述できる．（7.1.39）を使用すると，(7.1.45) は（7.1.46）に記述できる．

$c \cdot \Delta t_s \cdots (7.1.42)$ 慣性座標系 S 内での光の右斜め上方への移動距離

$$c \cdot \Delta t_s \cdot \sin\theta = c \cdot \Delta t_s \cdot \frac{\sqrt{c^2 - {v_x}^2}}{c} \cdots (7.1.43)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{c^2 - {v_x}^2}}{c} \cdots (7.1.44)$$

$c \cdot \Delta t_s \cdot \sin\theta = \sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdot \Delta t_s \cdots (7.1.45)$

$c \cdot \Delta t_s \cdot \sin\theta = c \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.46)$ 慣性座標系 S_1 内での光の垂直上方への移動距離

図 7.1.4 では（7.1.44）は（7.1.47）の範囲内での変化であるものと扱える．(7.1.47）から，慣性座標系 S 内の光の移動距離（7.1.42）は慣性座標系 S_1 内の光の移動距離（7.1.46）以上に長いことは明らかである．

$0 \le \sin\theta \le 1 \cdots (7.1.47)$

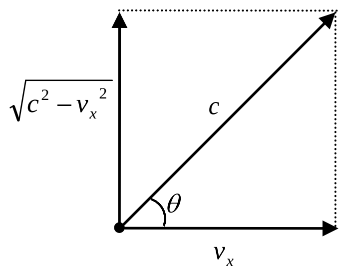

図 7.1.4　慣性座標系 S での光の速度ベクトルおよび角度

（7.1.46）に類似の記述で（7.1.48）のように慣性座標系 S_1 内の光の波長 λ_1 およびその慣性座標系 S 内の光の波長 λ を計算できるものとする．(7.1.48）のような関係を応用することで図 7.1.1 の時計から（7.1.29）を導出できる．このことは，付録 v で説明をした．

$\lambda = \lambda_1 \cdot \sin\theta \cdots (7.1.48)$

$\lambda = \lambda_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdots (7.1.29)$ 移動している時計の光の波長は収縮する．

図 7.1.1 の時計が慣性座標系 S 上の原点 O にあるものと仮定する．原点 O に棒 P が不動で在るものと仮定する．両慣性座標系の時点が 0 のときには，その原点 O に慣性座標系 S_1 上の原点 Os_1 が一致しているものと仮定する．慣性座標系 S_1 が慣性座標系 S 上を速さ（7.1.33）で x 軸の正の方向に等速度運動している．慣性座標系 S_1 上から慣性座標系 S 上の原点 O に在る棒 P を観測すると，棒 P は速度（7.1.49）で S_1 の x 軸の負の方向に等速度運動している．ただし，(7.1.49）のベクトル $\mathbf{i}$ は慣性座標系 S_1 の x 軸の単位ベクトルである．

$v_{x1} \cdot \mathbf{i} = -v_x \cdot \mathbf{i} \cdots (7.1.49)$

慣性座標系 S 上の原点 O に在る棒 P から時計が時間（7.1.36）で移動した距離は（7.1.50）で記述できる．慣性座標系 S_1 内で時計――原点 Os_1 の位置に在る．――から棒 P が時間（7.1.30）で離れた距離は（7.1.51）で記述できる．

$\Delta x = \left| v_x \cdot \Delta t_s \right| \cdots (7.1.50)$ 慣性座標系 S 上での図 7.1.1 の時計の移動した距離

$\Delta x_1 = \left| -v_x \cdot \Delta t_{s1} \right| \cdots (7.1.51)$ 慣性座標系 S 上の棒 P が慣性座標系 S_1 上で移動した距離

時間の変換（7.1.41）が成立するので，(7.1.50）および（7.1.51）には関係（7.1.52）が成立する．(7.1.52）は（7.1.53）に整理できる．(7.1.50）および（7.1.51）を使用すると，(7.1.53）は（7.1.54）に書き直すことができる．(7.1.54）では，慣性座標系 S 上での時計の移動距離（7.1.50）は慣性座標系 S_1 上の棒 P の移動距離（7.1.51）には等しくない．慣性座標系 S_1 上での棒 P の速さは慣性座標系 S 上での時計の速さに等しい．２つの慣性座標系の時間には変換（7.1.41）が成立する．このことで，それぞれの慣性座標系での時間が異なることから x 軸方向での慣性座標系 S 上の時計の移動距離および慣性座標系 S_1 上の棒 P の移動距離が関係（7.1.54）を満足することになる．一方，２つの慣性座標系の y 軸および z 軸上の長さが等しいことは既に説明をした．慣性座標系上での移動距離である（7.1.50）および（7.1.51）の観測結果が異なることは時間の観測のみでは説明できない．特殊相対性原理で使用可能になる物理法則に，光速度の不変

の原理で生じる‘等速度運動する時計内の不変量となる距離’および‘時間の変換’を使用することで移動距離である（7.1.50）および（7.1.51）が異なることを説明できる．

$$\left|v_x \cdot \Delta t_s\right| = \left|-v_x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_{s1}\right| \cdots (7.1.52)$$

$$\left|v_x \cdot \Delta t_s\right| = \frac{\left|-v_x \cdot \Delta t_{s1}\right|}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \cdots (7.1.53)$$

$\Delta x = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}} \cdots (7.1.54)$特殊相対性理論では，等速度運動している方向の物体の長さが収縮するものと解釈できる．

（7.1.48）および（7.1.54）では，長さが収縮する場合の慣性座標系が互いに逆になる．このことについては，質点が真空中の光である場合とそうでない場合であることで説明できる．特殊相対性理論では真空中の光の移動距離を使用して図 7.1.1 の時計で時間を計算する．このような光の移動距離は，図 7.1.1 での時計の建造物の床から垂直上方の距離である．慣性座標系内の光の移動距離を記述する際に使用する時間は，この図 7.1.1 での時計の光の移動距離から計算する量である．この意味では，図 7.1.1 の時計で正確な時間を計算するのに使用した y 軸方向の光の移動距離は，慣性座標系内を任意の方向に進んでいる真空中の光の移動距離に等しい必要がある．そのような垂直上方の真空中の光の移動距離で計算したものが（7.1.48）であるものと考えることができる．（7.1.54）は x 軸方向に平行な等速度運動をしている質点で計算できる．ローレンツ変換の時点の式で導出できる時間の変換の式は，運動方向の影響が反映された記述になる．ローレンツ変換の時点の式（2.11）を使用すると時間の変換（7.1.55）を導出できる．（7.1.55）の右辺には x 軸成分を記述する箇所がある．その x 軸成分は余弦を使用することで，正弦と関係を与えることができる．正弦は y 軸方向の成分を記述するのに使用できる．このことで，x 軸成分および y 軸成分を時間の変換に関係付けることができる．真空中の光の波長及び周期を計算するには，図 7.1.1 の時計の送信機から送り出された真空中の光の移動距離の y 軸成分を使用する．真空中の光での正弦波の変換で，真空中の光の移動距離を記述する y 軸成分には真空中の光の速さでない場合の慣性運動をする質点の y 軸成分とは異なる扱いをする．

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2}\right) \cdots (2.11)$$

$$\Delta t_1 = \gamma \cdot \left(\Delta t - \frac{u \cdot \Delta x}{c^2}\right) \cdots (7.1.55)$$

もし，質点が y 軸方向のみに移動しているならば x 軸方向の質点の移動距離（7.1.56）が成立する．（7.1.56）を時間の変換（7.1.55）の右辺に代入すると時間の変換（7.1.57）になる．

$$\Delta x = 0 \cdots (7.1.56)$$

$$\Delta t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \Delta t \cdots (7.1.57)$$

次に，質点の x 軸方向の速度の成分が（7.1.58）になる場合を計算する．時間の変換（7.1.55）を（7.1.59）に書き換える．（7.1.58）を時間の変換（7.1.59）の右辺に代入すると（7.1.60）になる．（7.1.60）を整理すると時間の変換（7.1.61）

になる．

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u \cdots (7.1.58)$$

$$\Delta t_1 = \gamma \cdot \Delta t \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}\right), (\Delta t \neq 0) \cdots (7.1.59)$$

$$\Delta t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \Delta t \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \cdots (7.1.60)$$

$$\Delta t_1 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdots (7.1.61)$$

時間の変換（7.1.57）および時間の変換（7.1.61）では時間が短くなることを観測できる慣性座標系が互いに逆である．真空中の光を波として扱う際に，ひとつの慣性座標系上で周期として観測できた時間を他方の慣性座標系の時間に変換したものが周期であることを上述の計算では保証していない．このような時間の変換についての考察を付録ｖで与えた．真空中の光ではない質点の等速度運動の計算では，（7.1.57）および（7.1.61）の時間の変換は相対性として同じ現象を扱っているものと考えることができる．一般に，真空中の光の移動方向のｘ軸成分を記述する余弦が$\cos\theta = \pm 1$でない場合では，各慣性座標系での真空中の光の角度は同じものにはできない．このことは，（2.1）および（2.2）のように慣性座標系のｘ軸成分の符号が逆になることおよびｘ軸成分を記述する余弦の角度を観測する始点がｘ軸の正の方向に与えられることから説明できる．その角度の正の方向は時計とは逆向きの左回りとする．図 7.1.1 の時計で――正確に時間を計算するために垂直上方の角度を使用した．――垂直上方とは異なる角度で図 7.1.1 の送信機から真空中の光が送り出された場合でも，その真空中の光はｙ軸方向の移動距離の成分をもつものと考える．ただし，図 7.1.1 の建造物の床に水平――上述の$\cos\theta = \pm 1$の場合のこと．――な方向に送信機から送り出した場合はｙ軸成分の移動距離は零となる．

$\mathbf{u}_{S\_S1} = -u\mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \cdots (2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

$\mathbf{u}_{S1\_S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.2)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度

慣性座標系上の光がどのような向きで進んでいようとも，その真空中の光の移動距離は図 7.1.1 の時計の送信機から送り出された真空中の光のｙ軸方向での移動距離に一致するものと考える．そのｙ軸方向での真空中の光の移動距離は，真空中の光での正弦の変換を使用すると２つの慣性座標系間での波長の変換に記述できる――付録ｖで説明をした．――．このように移動距離がｙ軸方向のみで与えられることは，（7.1.54）のようなｘ軸方向に移動する質点の計算とは特徴的に異なる．真空中の光での正弦の変換は慣性座標系で真空中の光が進んでいる角度で決定する．一般に，その角度は任意に選択できる．その正弦の変換に記述した正弦で図 7.1.1 の時計の送信機から送り出された真空中の光のｙ軸方向での移動距離を記述する．ｙ軸方向の移動距離の関係式を記述できる真空中の光での正弦の変換は，真空中の光速度でのｘ軸成分の影響を受けるものと考えることができる．その正弦の変換はローレンツ変換での時間の変換とは異なる記述でｘ軸成分を使用する．そのようにｘ軸成分を記述する箇所が異なることは（7.1.48）および（7.1.54）の記述の異なる箇所として特徴的である．その特徴的な（7.1.48）の箇所は速度の変換のｙ軸成分で記述できる．真空中の光の速さには光速度の不変の原理が保証される．（7.1.48）および（7.1.54）では長さが収縮する場合の慣性座標系が互いに逆になることは，速度の変換で説明できる質点の速度成分で考えることができる――付録ｖで説明をした．――．真空中の光での正弦の変換は，速度の変換から導出できる．速度の変換は文献１で導出している．

（7.1.48）は２つの慣性座標系から真空中の光の移動距離を観測した計算である．図 7.1.1 の時計での時間の計算は真

空中の光を観測して得るもので，棒 P を観測する必要はないものと解釈できる．(7.1.54) は，慣性座標系 S では時計の位置を観測して慣性座標系 S_1 では棒 P を観測した移動距離の計算である．等速度運動をする棒 P の移動距離は線形性を示す．移動距離 (7.1.54) はローレンツ変換から導出できるものと考えることができる．棒 P では，両慣性座標系の初期の時点が零である際に原点 O および原点 O_{S_1} が一致することを示すのに使用することを仮定した．その仮定を与えた棒 P およびローレンツ変換の係数は定数で変数の指数は 1 であることを使用して，線形性を示すローレンツ変換 (2.8) ～ (2.11) を導出できる．ローレンツ変換 (2.8) ～ (2.11) では，時間および 3 次元空間は相対性を各方程式で示すものと扱うことができる．ローレンツ変換の (2.8) および (2.11) には，係数 (2.12) を記述しているので慣性座標系が真空中の光の速さで等速度運動する場合には使用できないことは明らかである．真空中の光が静止できる慣性座標系を考える場合に，真空中の光の速さで移動する慣性座標系を考えることではローレンツ変換 (2.8) ～ (2.11) を使用することはできない．

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \cdots (2.8)$$

$$y_1 = y \cdots (2.9)$$

$$z_1 = z \cdots (2.10)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2}\right) \cdots (2.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.12)$$

もし，慣性座標系 S_1 の等速度の速さが真空中の光の速さ (7.1.55) であるならば，図 7.1.1 の時計内の光の速さは (7.1.35) を使用すると (7.1.56) になる．光速度の不変の原理を使用するために，図 7.1.1 の時計内の送信機から光が送り出せないものと解釈できる．図 7.1.1 の時計内の光の移動距離で時間を計算するので，光の移動距離が零であるならば時間 (7.1.32) の値は零になる．アインシュタインの特殊相対性理論では光速度の不変の原理を公理のひとつとするために，真空中の光の速さ (2.6) で移動することを仮定した慣性座標系内で真空中の光は真空中の光の速さ (2.6) で移動する．このことは，アインシュタインの特殊相対性理論では真空中の光の速さ (2.6) で移動する質点として扱える光を静止して観測できる慣性座標系が与えられていないものと解釈できる．このために等速度運動する真空中の光の静止質量を，そのような慣性座標系で説明できない．

$$v_x = c \cdots (7.1.55)$$

$$v_y = \sqrt{c^2 - c^2} = 0 \cdots (7.1.56)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

時間を使用することで光の波の振動数を観測することができる．その光の振動数を使用して光のエネルギーを観測できることは光子を使用して既に説明をした．そのような光子のエネルギーを観測することで，光の静止エネルギーを観測できることは保証できない．光の波が伝搬していることで光の波に波長および振動数を仮定できる．光の振動数の変換 (7.1.26) では，慣性座標系は真空中の光の速さ (2.6) で移動することは許されていない．

$$\nu = \nu_1 \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (7.1.26)$$

ここで，真空中の光の速さ（2.6）で慣性座標系が等速度運動することを仮定して，その慣性座標系上の光子の振動数を考察する．（7.1.26）を（7.1.57）に書き直す．ここで慣性座標系の速さを（7.1.58）で仮定する．（7.1.58）を（7.1.57）の右辺に代入すると（7.1.59）になる．（7.1.59）では速さ（7.1.58）で等速度運動する慣性座標系上では光子の振動数は零（7.1.59）になる．光速度の不変の原理を使用すると，慣性座標系上では光は等速度運動をする．そのように質点で考えた光は電磁波として真空中の光の速さで伝搬するものと扱うことができる．真空中の光の速さで移動する光の波の振動数は（7.1.59）にならないことは明らかである．振動数は時間を使用して観測できる．（7.1.56）では真空中の光の速さ (2.6) で等速度運動する時計の時間は零になることを計算した．時間が零であることでは振動数を観測できない．そのように振動数が観測できないことで（7.1.59）を考えるならば，（7.1.59）は（7.1.58）を仮定して導出した値であり，もし（7.1.59）を使用するならば新たに理論に定義する必要性が生じる．

$$\nu_1 = \nu\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdots(7.1.57)$$

$$u = v_x = c\cdots(7.1.58)\text{仮定}$$

$$\nu_1 = \nu\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} = 0\cdots(7.1.59)$$

振動数 (7.1.59) を使用して光子のエネルギーを計算すると (7.1.60) になる．(7.1.60) を光子の静止エネルギー (7.1.61) として解釈すると静止質量（7.1.62）になる．（7.1.62）の右辺の値は，本書の静止質量の定義（3.7）を使用して計算できる（7.1.63）の右辺の値に等しくなる．（7.1.63）では，光子の速さとして真空中の光の速さ（7.1.64）を仮定している．静止質量（7.1.63）は光子が静止していることを仮定した質量である．このことでは，光速度の不変の原理では光子が静止できる慣性座標系を与えているものとは解釈できない．特殊相対性理論で観測できない値として真空中の光の静止質量（7.1.62）を扱うことを著者は考える．この考察での（7.1.62）の扱いは導出過程が異なることで（7.1.63）とは異なるものとしている．

$$E_1 = h\cdot\nu_1 = 0\cdots(7.1.60)$$

$$E_1 = m_{01}\cdot c^2 = 0\cdots(7.1.61)$$

$$m_{01} = 0\cdots(7.1.62)$$

$$m_0 \equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\le v\le c)\cdots(3.7)$$

$$m_0 = m(c)\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} = 0\cdots(7.1.63)$$

$$v = c\cdots(7.1.64)$$

図 7.1.1 の時計では，光速度の不変の原理を使用すると真空中の光の速さで等速度運動する慣性座標系の時間が計算できなくなる．このことから，その慣性座標系での速度を観測できなくなるものと解釈できる．速度の観測ができないことで，光の伝搬を記述する波の振動数および速さを観測できなくなる．このことで，光の波を記述できなくなるものと考えることができる．光の波が記述できないならば，電磁波のエネルギーを計算できなくなるものと考えることができる．振動数が観測できないならば光子のエネルギー（7.1.20）――あるいは（7.1.19）――を計算できない．このことでは，（a.3.3）――あるいは（a.3.1）――を電磁波のエネルギーあるいは光子のエネルギーで観測できないものと解釈できる．特殊相対性理論で使用する図 7.1.1 の時計の時間では観測できない質量であるものと扱える光の静止質量を仮定して理論に定義することが許される余地が有る．

一般には特殊相対性理論では,慣性座標系Ｓ内で移動する慣性座標系S_1のひとつの時計で計算する時間をproper timeと呼ぶ．日本語では固有時あるいは固有時間と呼ばれることがある．本書では，そのような学術語は使用しないで以降の説明をしている．

7.2 慣性座標系および時計との関係

特殊相対性理論で使用する慣性座標系は撓まない空間であることを仮定している．特殊相対性原理では，慣性座標系の運動を決定する物理学の法則はないものと解釈できる．光速度の不変の原理を使用することで，慣性座標系の運動が等速度運動に限定されるものと解釈できる．一般相対性理論では，加速度運動の加速度で重力場が生じるものと仮定することで，真空中の光の速さが定数でなくなる．このことで，重力場の影響で光の位置ベクトルの軌跡が曲線を描くことになる．このように真空中の光の運動が等速度でなくなることは光速度の不変の原理では説明できないことになる．そのような重力場を仮定しないで，特殊相対性理論では真空中の光の運動を等速度運動で説明する．光速度の不変の原理で等速度運動する慣性座標系を使用することになり，その４次元の時空の数学的性質を説明する幾何学が決定する．

２０１０年現在では，その幾何学は擬リーマン幾何学――pseudo-Riemannian geometry――と呼ばれている．その幾何学で定義している計量に擬リーマン計量――pseudo-Riemannian metrics――と呼ばれるものがある．特殊相対性理論で４次元時空と呼んでいる空間は擬リーマン幾何学で使用する空間として扱われる．簡単には，その時空となる空間で扱う数学的な距離として擬リーマン計量を考えることができる．一般には特殊相対性理論での慣性運動は等速度運動を意味するので，慣性運動の位置ベクトルの軌跡は直線上に考えることになる．特殊相対性理論では慣性運動をする質点に合力――零でない合力．――が作用すると，その質点は慣性運動を一般に続けることができない．慣性座標系内を運動する質点の合力は運動方程式で説明できる．その運動方程式はアインシュタインが修正したニュートンの運動方程式である．ローレンツ変換（2.8）～（2.11）で使用する慣性座標系上での加速度運動で，その運動方程式の加速度運動を説明できる．その運動方程式では，質点に作用する合力はその質点の加速度運動で説明する．特殊相対性理論では，慣性座標系上での質点の加速度は，他の慣性座標系上での加速度に変換できる．このような変換については速度に対しても同様である――文献１――．特殊相対性理論での慣性座標系上では，等速度運動している質点は他の慣性座標系上で静止している質点として説明できる．特殊相対性理論での加速度については，慣性座標系上で加速度運動している質点が静止し続けるひとつの慣性座標系は存在しないことになる．この観点では，特殊相対性理論では速度の相対性を説明できるが加速度の相対性を説明できていない．そのような加速度の相対性は一般相対性理論で説明することになる．特殊相対性理論での加速度運動で，質点は真空中の光の速さよりは速くはなれないものと一般に解釈されている．ローレンツ変換（2.8）～（2.11）では係数（2.12）を使用している．ローレンツ変換（2.8）～（2.11）の定義区間（2.14）から係数（2.12）に（2.13）が成立する．この定義区間（2.14）から係数（2.12）には（2.15）が成立する．（2.14）ではローレンツ変換で使用する慣性座標系の等速度の速さは真空中の光の速さ（2.6）よりも遅いことを示している．

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \cdots (2.8)$$

$$y_1 = y \cdots (2.9)$$

$$z_1 = z \cdots (2.10)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \cdots (2.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.12)$$

$$u \neq c \cdots (2.13)$$

$-c < u < c \cdots (2.14)$

$1 \le \gamma < \infty \cdots (2.15)$

ローレンツ変換（2.8）～（2.11）では真空中の光の速さ（2.6）で等速度運動する慣性座標系との変換はできない．特殊相対性理論で使用する４次元時空での数学の定義上では擬リーマン計量を真空中の光の速さで計算することができる．アインシュタインの特殊相対性理論では，慣性座標系内を真空中の光が移動することを仮定してローレンツ変換を導出している．相対論的質量（2.23）─–あるいは（2.35）──では真空中の光の質量を計算できない．このことは，相対論的質量（2.23）の定義区間が（2.25）──あるいは（2.37）──であることから明らかである．

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$0 \le v < c \cdots (2.25)$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

$0 \le v_1 < c \cdots (2.37)$

相対論的質量（2.23）で記述する運動方程式（2.17）～（2.19）は慣性座標系内を移動する質点の速度に等しい慣性座標系を仮定して，その運動方程式を説明できる．（2.23）および（2.35）は速さの関数であり，質量が速さで変化する．このような質量は，ニュートン力学の定数として扱う質量とは異なる．

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \cdots (2.17)$$

$$F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \cdots (2.18)$$

$$F_z = \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \cdots (2.19)$$

一般には，特殊相対性理論では光を質点として扱い，その質点の慣性質量─–（a.3.2）および（a.3.4）のこと．──を予言している．慣性質量が光のエネルギーで異なることは，特殊相対性理論および電磁気学のそれぞれの計算で考察することができる．エネルギーが観測する慣性座標系で異なる値になることはニュートン力学でも説明できる．光の波長が慣性座標系の等速度の方向で（7.1.29）のように異なるならば，その振動数も異なることを既に説明をした．光子のエネルギーは振動数で決定する．このことから，光のエネルギーは観測する慣性座標系で異なることになる．さらに，光の慣性質量が観測する慣性座標系の等速度で異なる値になることを意味する．これらのことから，慣性質量が速さの関数であることを考えられる．このように慣性質量が速さの関数（3.8）であることで，質点が静止している場合の質量を考え定数として扱う静止質量として仮定できる．本書では特殊相対性理論に慣性質量（3.8）を仮定することで，ニュートン力学とは異なる質量を導入する．

$\lambda = \lambda_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdots (7.1.29)$ 移動している時計の光の波長は収縮する．

$m(v), (0 \le v \le c) \cdots (3.8)$

質量（3.8）を使用して光の運動量を考えることができる．光の運動量については，電磁気学からも導出できる．アインシュタインの光の慣性質量および光子の予言は，電磁気学よりも直接的に光の運動量を論じることができる．そのよ

うな光の運動量は相対論的質量――（2.23）および（2.35）のこと．――とともに運動量の保存の法則を使用できることを仮定できる．擬リーマン計量が定義された４次元時空で質点の運動量ベクトルを記述する．４次元時空での運動量ベクトルの擬リーマン計量が不変量になることで静止質量（3.7）を導出することができる――７章４節で静止質量を導出する――．静止質量は慣性質量の関数から計算できるものと考え，一般には速さの関数となる慣性質量（3.8）を仮定することで静止質量を扱う．本書では，静止質量（3.7）を使用して光の静止質量を定義した．静止質量の定義（3.7）は質点の速さの２乗および質点の質量との関係を記述している．その関係を記述している一部は，特殊相対性理論で使用する擬リーマン幾何学の４次元時空で使用する擬リーマン計量で導出できる時間の変換の式である．その時間の変換式は７章２節で導出する．７章３節では運動量について時点を使用して考察している．運動量を計算する際に質点が静止している慣性座標系の時点を使用することがある．そのような特殊相対性理論の時点については，ニュートン力学とは異なる箇所が特徴のひとつになる．その時点の特徴についてガリレイ変換が定義された時空および擬リーマン計量が定義された時空を使用して考察している．７章４節では質量，時点およびエネルギーの関係について簡単な考察をしている．その考察では，静止質量（3.7）を導出して（a.3.1）および（a.3.3）が運動量と関係をもつ式を擬リーマン計量で与えられることを論じている．そのような関係式では，質量およびエネルギーは時間と慣性座標系の３次元の空間成分との関係として与えられる．位置，時間およびエネルギーを４次元時空での関係式で考えることができる．撓まないそれぞれの時空で，慣性座標系内の質点の全エネルギーを７章２節で導出する時間の変換で質量の変換に書き直すことができる．時空内で記述するベクトルは時空内で軌跡を描くことができる．一般に，その軌跡は曲線を描くものと扱える．曲線で曲面を描くことができる．その曲面を４次元時空で観察できる．曲面の数学的性質は曲線を使用して考えることができる．特殊相対性理論の４次元時空の曲面は，光速度の不変の原理から計算できる時間および質点の空間のベクトルで考えることができる．

$$m_0 \equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\le v\le c)\cdots(3.7)$$

質点が移動している慣性座標系内の時点を（7.2.1）で記述する．時点（7.2.1）は（7.1.41）の左辺の時間を記述している時点である．その質点が静止している慣性座標系内の時点を（7.2.2）で記述する．時点（7.2.2）は（7.1.41）の右辺の時間を記述している時点である．これら２つの慣性座標系内の時点の関係を関数（7.2.3）で記述する．

$$t\cdots(7.2.1)$$

$$\Delta t_s=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}}}\cdot\Delta t_{s1}\cdots(7.1.41)$$

$$t_1\cdots(7.2.2)$$

$$t_1(t)\cdots(7.2.3)$$

図 7.1.1 の時計が真空中の光の速さで等速度運動した場合には，時計内の時間――（7.1.41）の右辺の時間のことである．――は零になった．図 7.1.1 の時計が等速度運動している慣性座標系内の各位置に静止し続けている時計の時間――（7.1.41）の左辺の時間のことである．――は計算できるので，その時間の時点（7.2.1）に対して等速度運動している時計の時点（7.2.2）が零に対応する関数（7.2.3）を記述できる．

（7.1.41）は（7.2.4）に書き直すことができる．図 7.1.1 の時計は等速度運動をしているので，（7.2.4）の右辺では慣性座標系 S の時間 Δt のみが変数である．

$$\Delta t_1 = \sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}} \cdot \Delta t \cdots (7.2.4)$$

ローレンツ変換の時点の線形性——７章３節で考察する．——を考慮することで，慣性座標系 S の時点が零の場合は慣性座標系 S_1 の時点が零である．そのような線形性を示す時間（7.2.4）の微分係数を（7.2.5）で記述できる．

$$\lim_{h \to 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \sqrt{1-\frac{{v_x}^2}{c^2}} \cdots (7.2.5)$$

時点（7.2.3）の微分は（7.2.6）で記述できる．時点（7.2.1）の微分は時間（7.2.7）で記述できる．

$$\mathrm{d}t_1(t) = \lim_{h \to 0} \frac{t_1(+h) - t_1(t)}{h} \cdot h \cdots (7.2.6)$$

$$\mathrm{d}t = h \cdots (7.2.7)$$

微分係数（7.2.5）および時点の微分（7.2.7）を使用すると，時点の微分（7.2.6）で（7.2.8）を記述できる．時点の微分（7.2.8）では時計の x 軸方向の速さは，慣性座標系 S_1 の等速度の成分として u で記述した．時点の微分（7.2.8）は（7.2.9）に書き直すことができる．

$$\mathrm{d}t_1(t) = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \mathrm{d}t \cdots (7.2.8)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, (\mathrm{d}t \neq 0) \cdots (7.2.9)$$

時点の微分（7.2.8）は時点の変換を示している．(7.2.8）は慣性座標系 S 内での図 7.1.1 の時計の等速度運動を仮定して導出したものである．(7.2.9）はローレンツ変換の時点の微分係数からも導出できる．(7.2.9）のような微分係数となる式は静止質量を７章４節で導出する際に使用する．７章２節では，上述の導出よりも一般的な方法で，その式を導出する．その導出方法では，特殊相対性理論で擬リーマン計量が不変量になることを使用する．そのような導出をする前に，ローレンツ変換で（7.2.9）について考察する．

特殊相対性理論での４次元時空を２つ仮定する．慣性座標系 S の時空のベクトルを（7.2.10）で記述する．慣性座標系 S_1 の時空のベクトルを（7.2.11）で記述する．

$$(x, y, z, c \cdot t) \cdots (7.2.10)$$

$$(x_1, y_1, z_1, c \cdot t_1) \cdots (7.2.11)$$

ローレンツ変換 (2.8) ～ (2.11) の逆変換として (7.2.12) ～ (7.2.15) を導出できる．文献１で逆ローレンツ変換 (7.2.12) ～（7.2.15）を導出している．

$$x = \gamma \cdot (x_1 + u \cdot t_1) \cdots (7.2.12)$$

$$y = y_1 \cdots (7.2.13)$$

$$z = z_1 \cdots (7.2.14)$$

$$t = \gamma \cdot \left(t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot x_1\right) \cdots (7.2.15)$$

（7.2.15）の微分係数を (7.2.16) で記述できる．速度の x 軸の成分 (7.2.17) を仮定すると微分係数 (7.2.16) は (7.2.18) に記述できる．微分係数（7.2.18）を使用すると，慣性座標系 S の時点の微分（7.2.19）を記述できる．慣性座標系 S_1 での時間は時点の微分 (7.2.20) として記述できる．時点の微分 (7.2.19) は時間の変換を意味する．時間の変換 (7.2.19) は慣性座標系 S_1 内を質点が移動している場合を含めて記述している．

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{t(t_1+h_1)-t(t_1)}{h_1}=\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdots(7.2.16)$$

$$v_{x1}(t_1)=\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdots(7.2.17)$$

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{t(t_1+h_1)-t(t_1)}{h_1}=\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot v_{x1}(t_1)\right)\cdots(7.2.18)$$

$$\mathrm{d}t(t_1)=\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot v_{x1}(t_1)\right)\cdot h_1\cdots(7.2.19)$$

$$\mathrm{d}t_1=h_1\cdots(7.2.20)$$

慣性座標系 S_1 の時点の微分（7.2.20）および係数（2.12）を使用すると，微分係数（7.2.18）は（7.2.21）に記述できる．微分係数（7.2.21）は慣性座標系が真空中の光の速さで移動している場合は使用できないことは係数（2.12）から明らかである．

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(=\mathrm{const.})\cdots(2.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{1+\frac{u}{c^2}\cdot v_{x1}(t_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},(u\neq\pm c,\mathrm{d}t_1\neq 0)\cdots(7.2.21)$$

質点が慣性座標系 S_1 で x 軸方向には移動していないことを仮定すると（7.2.22）を満足する．（7.2.22）および（2.12）を使用すると，慣性座標系 S の時点の微分（7.2.19）は（7.2.23）になる．（7.2.22）を使用すると，微分係数（7.2.21）は（7.2.24）になる．

$$v_{x1}(t_1)=0\cdots(7.2.22)$$

$$\mathrm{d}t(t_1)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot h_1,(u\neq\pm c)\cdots(7.2.23)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},(u\neq\pm c)\cdots(7.2.24)$$

時間の変換（7.2.23）は慣性座標系 S_1 内の質点が静止している場合で使用できる．このことは，時間の変換（7.1.41）と同様な仮定である．（7.2.23）は質点が慣性座標系 S_1 内を x 軸方向に移動しないで，y 軸方向および z 軸方向に移動している場合でも成立する時間の変換の式である．このような運動は時間の変換（7.1.41）を導出したときに使用した図 7.1.1 の時計の運動とは明らかに異なる．慣性座標系の時間の変換に記述されない慣性座標系 S_1 の位置で計算する質点の速度の成分の影響は微分係数（7.2.24）に示されない．

擬リーマン計量を使用して時間の変換を導出する．特殊相対性理論で使用する 4 次元時空では擬リーマン計量が不変量になる場合で静止質量，エネルギー，運動方程式および工率などを計算することができる．擬リーマン計量を定義した 4 次元時空は重力場を考察するのに使用できる．（2.27），（2.39），（a.3.1）および（a.3.3）で記述した質点の全

エネルギーの慣性質量は重力場を計算していない特殊相対性理論で導出できたものである．重力場での時間，空間および質量が特殊相対性理論のものとは異なる箇所を一般相対性理論で説明できる．一般相対性理論での４次元時空の性質は数学的には撓む空間であり，特殊相対性理論での撓まない４次元時空とは異なる．そのような撓む４次元時空を考察する際に，擬リーマン計量を使用して簡単な考察をすることもある．その重力場の４次元時空の時間および質量について考察するのに擬リーマン計量を定義した４次元時空を使用することもある．そのような考察をする際に必要な擬リーマン計量を定義した４次元時空での計算を本書の以後の本文では採用する．

慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 を仮定する．慣性座標系 S_1 は慣性座標系 S 内を等速度運動しているものと仮定する．慣性座標系 S_1 に質点および図 7.1.1 の時計が静止しているものとする．それぞれの慣性座標系に４次元時空を仮定する．慣性座標系 S の４次元時空にはベクトル（7.2.25）およびベクトル（7.2.26）が成立するものと仮定する．慣性座標系 S_1 の４次元時空にはベクトル（7.2.27）およびベクトル（7.2.28）が成立するものと仮定する．ベクトル（7.2.25）～ベクトル（7.2.28）では真空中の光の速さ（2.6）を記述している．

$$\left({}^1x,{}^1y,{}^1z,c\cdot{}^1t\right)=\left(x(t),y(t),z(t),c\cdot t\right)\cdots(7.2.25)$$

$$\left({}^2x,{}^2y,{}^2z,c\cdot{}^2t\right)=\left(x(t+h),y(t+h),z(t+h),c\cdot(t+h)\right)\cdots(7.2.26)$$

$$\left({}^1x_1,{}^1y_1,{}^1z_1,c\cdot{}^1t_1\right)=\left(x_1(t_1),y_1(t_1),z_1(t_1),c\cdot t_1\right)\cdots(7.2.27)$$

$$\left({}^2x_1,{}^2y_1,{}^2z_1,c\cdot{}^2t_1\right)=\left(x_1(t_1+h_1),y_1(t_1+h_1),z_1(t_1+h_1),c\cdot(t_1+h_1)\right)\cdots(7.2.28)$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\times\varepsilon_0}},(c\neq 0,c>0)\cdots(2.6)$$

（7.2.29）は擬リーマン計量と呼ばれるものである．特殊相対性理論で使用する４次元時空には擬リーマン計量（7.2.29）が定義されている．擬リーマン計量（7.2.29）の右辺には真空中の光の速さ（2.6）を記述している．

$$(\Delta s)^2=c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2-\left\{\left({}^2x-{}^1x\right)^2+\left({}^2y-{}^1y\right)^2+\left({}^2z-{}^1z\right)^2\right\}\cdots(7.2.29)$$

特殊相対性原理を使用すると，それらの４次元時空内の座標成分で物理法則を記述できる．４次元時空の時点は，それぞれの慣性座標系の時点になる．各時点は変換式で関係を与えることができる．そのような時点の変換の特別な場合は，質点が静止している慣性座標系 S_1 の４次元時空での擬リーマン計量に慣性座標系 S の４次元時空での擬リーマン計量が等しいことで導出できる．慣性座標系 S_1 に質点が静止しているので，その質点の慣性座標系 S_1 上の座標成分は定数である．このことで，（7.2.30）が成立する．（7.2.30）を擬リーマン計量（7.2.29）に代入すると（7.2.31）になる．

$${}^2x-{}^1x=0,{}^2y-{}^1y=0,{}^2z-{}^1z=0\cdots(7.2.30)$$

$$(\Delta s)^2=c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2\cdots(7.2.31)$$

慣性座標系 S_1 内で静止している図 7.1.1 の時計を使用して考える．擬リーマン計量で記述した（7.2.31）の右辺は，図 7.1.1 の時計内の真空中の光の y 軸方向の移動距離（7.1.31）に等しい記述である．図 7.1.1 の時計内の時間は（7.1.32）で計算できる．

$$\Delta r_{s1}=c\times\Delta t_{s1}\ \mathrm{m}\cdots(7.1.31)$$ y 軸方向の光の移動距離

$$\Delta t_c=\frac{\Delta r_c}{c}\ \mathrm{s}\cdots(7.1.32)$$

慣性座標系 S 内を慣性座標系 S_1 が等速度運動していることで，慣性座標系 S 内での y 軸方向の真空中の光の速さを（7.1.35）に計算した．慣性座標系 S 内での y 軸方向の真空中の光の移動距離を（7.1.37）で記述した．

$v_y = \sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdots (7.1.35)$ 慣性座標系 S 内での y 軸方向の光の速さ

$\Delta r_s = \sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdot \Delta t_s \cdots (7.1.37)$ 慣性座標系 S 内での y 軸方向の移動距離

（7.1.31）の y 軸方向の移動距離は（7.1.37）の y 軸方向の移動距離に等しいことで，（7.1.39）を記述した．慣性座標系 S 内では慣性座標系 S_1 が x 軸方向に等速度運動しているのだから，擬リーマン計量は（7.2.32）に記述できる．擬リーマン計量（7.2.32）は，（7.2.33）に整理できる．（7.2.33）を整理すると，（7.2.34）に記述できる．慣性座標系 S_1 内に静止している図 7.1.1 の時計は慣性座標系 S 内を x 軸方向に等速度運動している．（7.2.34）の右辺は，（7.1.37）の右辺のように記述でき，その記述は物理学では慣性座標系 S 内での図 7.1.3 の真空中の光の y 軸方向への移動距離であるものと解釈できる．

$\sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdot \Delta t_s = c \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.39)$

$(\Delta s)^2 = c^2 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 - \left\{ {v_x}^2 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 + 0 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 + 0 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 \right\} \cdots (7.2.32)$

$(\Delta s)^2 = c^2 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 - {v_x}^2 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 \cdots (7.2.33)$

$(\Delta s)^2 = \left(c^2 - {v_x}^2\right) \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 \cdots (7.2.34)$

改めて，慣性座標系 S_1 内の時点の記号（7.2.2）で（7.2.31）を書き直すと（7.2.35）になる．（7.2.35）の右辺は（7.1.31）と同じように記述でき，その記述は物理学で真空中の光の移動距離を意味する．図 7.1.1 および図 7.1.3 での時計の説明では，（7.2.34）の左辺は（7.2.35）の左辺に等しいものと扱える．このことから，（7.2.36）を記述できる．（7.2.36）は（7.2.37）に書き直すことができる．（7.2.37）は（7.1.39）と同様に記述できている．（7.2.37）では擬リーマン計量が不変量となることを示している．

$(\Delta s)^2 = c^2 \cdot \left({}^2t_1 - {}^1t_1\right)^2 \cdots (7.2.35)$

$\left(c^2 - {v_x}^2\right) \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 = c^2 \cdot \left({}^2t_1 - {}^1t_1\right)^2 \cdots (7.2.36)$

$\sqrt{c^2 - {v_x}^2} \cdot \left({}^2t - {}^1t\right) = c \cdot \left({}^2t_1 - {}^1t_1\right) \cdots (7.2.37)$ 擬リーマン計量の不変量

慣性座標系 S の x 軸方向のベクトルは，他の慣性座標系の x 軸，y 軸および z 軸で表示するベクトルで成分表示できる．このことからも，上述の（7.2.32）の x 軸方向での慣性座標系 S_1 の等速度の大きさは，x 軸，y 軸および z 軸方向のぞれぞれの速さで記述できる慣性座標系も仮定できる．このことでは，不変量（7.2.37）のような擬リーマン計量は（7.2.38）に記述できる．

$(\Delta s)^2 = c^2 \cdot \left({}^2t - {}^1t\right)^2 - \left\{ \left({}^2x - {}^1x\right)^2 + \left({}^2y - {}^1y\right)^2 + \left({}^2z - {}^1z\right)^2 \right\} = c^2 \cdot \left({}^2t_1 - {}^1t_1\right)^2 \cdots (7.2.38)$

質点が静止している慣性座標系 S_1 の時点を使用して，特殊相対性理論で使用するすべての慣性座標系の４次元時空の擬リーマン計量は（7.2.39）に記述できる．このことで，一般に特殊相対性理論の４次元時空の擬リーマン計量で不変量（7.2.40）を記述できる．

$$c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2-\left\{\left({}^2x-{}^1x\right)^2+\left({}^2y-{}^1y\right)^2+\left({}^2z-{}^1z\right)^2\right\}=c^2\cdot\left({}^2t_1-{}^1t_1\right)^2\cdots(7.2.39)$$

$$(\Delta s)^2=c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2-\left\{\left({}^2x-{}^1x\right)^2+\left({}^2y-{}^1y\right)^2+\left({}^2z-{}^1z\right)^2\right\}=c^2\cdot\left({}^2t_1-{}^1t_1\right)^2-\left\{\left({}^2x_1-{}^1x_1\right)^2+\left({}^2y_1-{}^1y_1\right)^2+\left({}^2z_1-{}^1z_1\right)^2\right\}\cdots(7.2.40)$$

光速度の不変の原理から真空中の光の移動距離に慣性座標系 S では（7.2.41）が成立し，慣性座標系 S_1 では真空中の光の移動距離（7.2.42）が成立する．真空中の光の移動距離（7.2.41）は（7.2.43）に書き直せる．真空中の光の移動距離（7.2.42）は（7.2.44）に書き直せる．（7.2.43）の右辺は（7.2.44）の右辺に等しいので，（7.2.45）を記述できる．（2.5）は（7.2.45）から導出できる．

$$\left({}^2x-{}^1x\right)^2+\left({}^2y-{}^1y\right)^2+\left({}^2z-{}^1z\right)^2=c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2\cdots(7.2.41)$$

$$\left({}^2x_1-{}^1x_1\right)^2+\left({}^2y_1-{}^1y_1\right)^2+\left({}^2z_1-{}^1z_1\right)^2=c^2\cdot\left({}^2t_1-{}^1t_1\right)^2\cdots(7.2.42)$$

$$c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2-\left\{\left({}^2x-{}^1x\right)^2+\left({}^2y-{}^1y\right)^2+\left({}^2z-{}^1z\right)^2\right\}=0\cdots(7.2.43)$$

$$c^2\cdot\left({}^2t_1-{}^1t_1\right)^2-\left\{\left({}^2x_1-{}^1x_1\right)^2+\left({}^2y_1-{}^1y_1\right)^2+\left({}^2z_1-{}^1z_1\right)^2\right\}=0\cdots(7.2.44)$$

$$c^2\cdot\left({}^2t-{}^1t\right)^2-\left\{\left({}^2x-{}^1x\right)^2+\left({}^2y-{}^1y\right)^2+\left({}^2z-{}^1z\right)^2\right\}=c^2\cdot\left({}^2t_1-{}^1t_1\right)^2-\left\{\left({}^2x_1-{}^1x_1\right)^2+\left({}^2y_1-{}^1y_1\right)^2+\left({}^2z_1-{}^1z_1\right)^2\right\}\cdots(7.2.45)$$

$$c^2\cdot t^2-x^2+y^2+z^2=c^2\cdot {t_1}^2-{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2\cdots(2.5)$$

光速度の不変の原理を満足するように，ローレンツ変換では（7.2.45）が成立する．光速度の不変の原理およびローレンツ変換で成立する不変量(7.2.45)では，慣性座標系内の質点の速さ――慣性座標系 S_1 の速さでもある．――は(7.2.46)を満足する．

$$0\le v\le c\cdots(7.2.46)$$

不変量（7.2.39）を使用するために，慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 を仮定する．不変量（7.2.39）を（7.2.47）に書き直す．不変量（7.2.47）の変数は，時点（7.2.1）を独立変数とする関数であるものと仮定する．

$$c^2\cdot(\Delta t)^2-\left\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\right\}=c^2\cdot(\Delta t_1)^2\cdots(7.2.47)$$

慣性座標系 S の各軸では（7.2.48）～（7.2.50）が成立することを仮定する．(7.2.48）～（7.2.50）では時点 t は定数であり，時間 h が変数である．(7.2.48）～（7.2.50）の右辺の微分係数は慣性座標系 S 内の質点の速度ベクトルを記述する各軸の成分を意味する．

$$x(t+h)-x(t)=v_x(t)\cdot h+o(h),(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.48)$$
$$y(t+h)-y(t)=v_y(t)\cdot h+o(h),(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.49)$$
$$z(t+h)-z(t)=v_z(t)\cdot h+o(h),(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.50)$$

慣性座標系 S の時間は（7.2.51）のように記述できる．時間（7.2.51）は（7.2.52）に整理できる．

$\Delta t=(t+h)-(t)\cdots(7.2.51)$ 慣性座標系 S の時間

$$\Delta t=h\cdots(7.2.52)$$

慣性座標系 S_1 の時間は（7.2.53）で記述できる．(7.2.53）では時点 t は定数であり，時間 h が変数である．

$$t_1(t+h)-t_1(t)={t_1}'(t)\cdot h+o(h),(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.53)$$

慣性座標系 S_1 の時間（7.2.53）の左辺を（7.2.54）で記述する．(7.2.54）の左辺を（7.2.53）の左辺に代入すると（7.2.55）になる．

$\Delta t_1 = t_1(t+h) - t_1(t) \cdots (7.2.54)$ 慣性座標系 S_1 の時間

$$\Delta t_1 = t_1{}'(t) \cdot h + o(h), (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}) \cdots (7.2.55)$$

時間（7.2.53）の平均変化率を（7.2.56）で記述できる．平均変化率（7.2.56）は（7.2.57）に整理できる．

$$\frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{(t+h)-(t)} = t_1{}'(t) \cdot \frac{h}{(t+h)-(t)} + \frac{o(h)}{(t+h)-(t)}, (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}) \cdots (7.2.56)$$

$$\frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = t_1{}'(t) \cdot \frac{h}{h} + \frac{o(h)}{h}, (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}) \cdots (7.2.57)$$

平均変化率（7.2.57）の両辺の極限値を（7.2.58）で計算する．極限値（7.2.58）の右辺の第 2 項は（7.2.59）になる．

$$\lim_{h \to 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(t_1{}'(t) \cdot \frac{h}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h}, (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}) \cdots (7.2.58)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0 \cdots (7.2.59)$$

（7.2.59）を使用して，(7.2.58）を整理すると（7.2.60）を記述できる．極限値（7.2.60）を整理すると微分係数（7.2.61）を記述できる．

$$\lim_{h \to 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = t_1{}'(t) \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{h}{h} \right) \cdots (7.2.60)$$

$$t_1{}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \cdots (7.2.61)$$

（7.2.48）の左辺を（7.2.62）で記述する．(7.2.62）の左辺を（7.2.48）の左辺に代入すると（7.2.63）になる．

$\Delta x(t) = x(t+h) - x(t) \cdots (7.2.62)$

$\Delta x(t) = v_x(t) \cdot h + o(h), (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}) \cdots (7.2.63)$

時間（7.2.64）が成立する場合では（7.2.63）は（7.2.65）になる．(7.2.65）では速度ベクトルの x 軸成分である微分係数は定数で存在することを仮定している．定数である微分係数に時間である零を掛けると，(7.2.65）の右辺の第 1 項は零になる．

$h = \Delta t = 0 \cdots (7.2.64)$

$\Delta x(t) = v_x(t) \cdot h + o(h) = 0, (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}), (h = 0) \cdots (7.2.65)$

時間（7.2.66）を仮定する．(7.2.62）の平均変化率を（7.2.67）で記述できる．平均変化率（7.2.67）は（7.2.68）に整理できる．

$h = \Delta t \neq 0 \cdots (7.2.66)$

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = v_x(t) \cdot \frac{h}{\Delta t} + \frac{o(h)}{\Delta t}, (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}), (\Delta t \neq 0) \cdots (7.2.67)$$

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = v_x(t) + \frac{o(h)}{\Delta t}, (h \to 0, t+h \in \mathbf{R_t} \text{ のとき}) \cdots (7.2.68)$$

（7.2.49）の左辺を（7.2.69）で記述する．(7.2.69）の左辺を（7.2.49）の左辺に代入すると（7.2.70）になる．

$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t) \cdots (7.2.69)$

$\Delta y(t)=v_y(t)\cdot h+o(h),(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.70)$

時間（7.2.64）が成立する場合では（7.2.70）は（7.2.71）になる．（7.2.71）では速度ベクトルのｙ軸成分である微分係数は定数で存在することを仮定している．定数である微分係数に時間である零を掛けると，（7.2.71）の右辺の第１項は零になる．

$\Delta y(t)=v_y(t)\cdot h+o(h)=0,(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき}),(h=0)\cdots(7.2.71)$

時間（7.2.66）を仮定する．（7.2.69）の平均変化率を（7.2.72）で記述できる．平均変化率（7.2.72）は（7.2.73）に整理できる．

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}=v_y(t)\cdot\frac{h}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t},(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき}),(\Delta t\neq 0)\cdots(7.2.72)$$

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}=v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t},(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.73)$$

（7.2.50）の左辺を（7.2.74）で記述する．（7.2.74）の左辺を（7.2.50）の左辺に代入すると（7.2.75）になる．

$\Delta z(t)=z(t+h)-z(t)\cdots(7.2.74)$

$\Delta z(t)=v_z(t)\cdot h+o(h),(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.75)$

時間（7.2.64）が成立する場合では（7.2.75）は（7.2.76）になる．（7.2.76）では速度ベクトルのｚ軸成分である微分係数は定数で存在することを仮定している．定数である微分係数に時間である零を掛けると，（7.2.76）の右辺の第１項は零になる．

$\Delta z(t)=v_z(t)\cdot h+o(h)=0,(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき}),(h=0)\cdots(7.2.76)$

時間（7.2.66）を仮定する．（7.2.75）の平均変化率を（7.2.77）で記述できる．平均変化率（7.2.77）は（7.2.78）に整理できる．

$$\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}=v_z(t)\cdot\frac{h}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t},(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき}),(\Delta t\neq 0)\cdots(7.2.77)$$

$$\frac{\Delta z(t)}{\Delta t}=v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t},(h\to 0,t+h\in\mathbf{R_t}\text{のとき})\cdots(7.2.78)$$

不変量（7.2.47）の両辺に記述している各項の平均変化率を（7.2.79）のように記述できる．（7.2.79）の左辺の第 1 項を整理すると（7.2.80）になる．（7.2.80）の右辺に時間の平均変化率（7.2.57）が記述できている．（7.2.80）を使用して，（7.2.9）のような時間の変換を導出できる．

$$c^2\cdot\left(\frac{\Delta t}{\Delta t}\right)^2-\left\{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right\}=c^2\cdot\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.79)$$

$$c^2-\left\{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right\}=c^2\cdot\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.80)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},(\mathrm{d}t\neq 0)\cdots(7.2.9)$$

（7.2.80）の右辺の第２項から第３項の平均変化率を計算する．（7.2.80）の第２項は平均変化率（7.2.68）を使用すると（7.2.81）に記述できる．

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdots(7.2.81)$$

（7.2.81）の右辺は（7.2.82）のように展開できる．（7.2.82）は（7.2.83）のように書き直すことができる．

$$\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)=v_x(t)\cdot v_x(t)+v_x(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_x(t)+\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdots(7.2.82)$$

$$\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=(v_x(t))^2+v_x(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_x(t)+\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.83)$$

（7.2.83）の両辺の極限値を（7.2.84）で計算できる．（7.2.84）の右辺の第 1 項は（7.2.85）になる．（7.2.84）の右辺の第２項および第３項は（7.2.86）になる．（7.2.84）の右辺の第４項は（7.2.87）になる．

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=\lim_{\Delta t\to 0}(v_x(t))^2+\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_x(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_x(t)\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.84)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}(v_x(t))^2=(v_x(t))^2\cdots(7.2.85)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_x(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}\right)=v_x(t)\cdot 0=0\cdots(7.2.86)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=0\times 0=0\cdots(7.2.87)$$

（7.2.85）～（7.2.87）を使用すると，（7.2.84）は極限値（7.2.88）になる．（7.2.81）の両辺の極限値は（7.2.89）に記述できる．

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_x(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=(v_x(t))^2\cdots(7.2.88)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2=(v_x(t))^2\cdots(7.2.89)$$

（7.2.80）の第３項は平均変化率（7.2.73）を使用すると（7.2.90）に記述できる．（7.2.90）の右辺は（7.2.91）のように展開できる．（7.2.91）は（7.2.92）のように書き直すことができる．

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2=\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\cdot\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)=\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdots(7.2.90)$$

$$\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)=v_y(t)\cdot v_y(t)+v_y(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_y(t)+\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdots(7.2.91)$$

$$\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=(v_y(t))^2+v_y(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_y(t)+\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.92)$$

（7.2.92）の両辺の極限値を（7.2.93）で計算できる．（7.2.93）の右辺の第 1 項は（7.2.94）になる．（7.2.93）の右辺の第２項および第３項は（7.2.95）になる．（7.2.93）の右辺の第４項は（7.2.87）になる．

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=\lim_{\Delta t\to 0}(v_y(t))^2+\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_y(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_y(t)\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.93)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}(v_y(t))^2=(v_y(t))^2\cdots(7.2.94)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_y(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}\right)=v_y(t)\cdot 0=0\cdots(7.2.95)$$

(7.2.87), (7.2.94) および (7.2.95) を使用すると, (7.2.93) は極限値 (7.2.96) になる. (7.2.90) の両辺の極限値は (7.2.97) に記述できる.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_y(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=\left(v_y(t)\right)^2\cdots(7.2.96)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2=\left(v_y(t)\right)^2\cdots(7.2.97)$$

(7.2.80) の第４項は平均変化率 (7.2.78) を使用すると (7.2.98) に記述できる. (7.2.98) の右辺は (7.2.99) のように展開できる. (7.2.99) は (7.2.100) のように書き直すことができる.

$$\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2=\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)\cdot\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdots(7.2.98)$$

$$\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)=v_z(t)\cdot v_z(t)+v_z(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_z(t)+\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdot\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)\cdots(7.2.99)$$

$$\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=\left(v_z(t)\right)^2+v_z(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}+\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_z(t)+\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.100)$$

(7.2.100) の両辺の極限値を (7.2.101) で計算できる. (7.2.101) の右辺の第 1 項は (7.2.102) になる. (7.2.101) の右辺の第２項および第３項は (7.2.103) になる. (7.2.101) の右辺の第４項は (7.2.87) になる.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_z(t)\right)^2+\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_z(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\cdot v_z(t)\right)+\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2\cdots(7.2.101)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_z(t)\right)^2=\left(v_z(t)\right)^2\cdots(7.2.102)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_z(t)\cdot\frac{o(h)}{\Delta t}\right)=v_z(t)\cdot 0=0\cdots(7.2.103)$$

(7.2.87), (7.2.102) および (7.2.103) を使用すると, (7.2.101) は極限値 (7.2.104) になる. (7.2.98) の両辺の極限値は (7.2.105) に記述できる.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(v_z(t)+\frac{o(h)}{\Delta t}\right)^2=\left(v_z(t)\right)^2\cdots(7.2.104)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2=\left(v_z(t)\right)^2\cdots(7.2.105)$$

(7.2.80) の両辺の極限値を (7.2.106) で計算する. 慣性座標系 S 内での質点の速度ベクトルの x 軸成分 (7.2.89), y 軸成分 (7.2.97) および z 軸成分 (7.2.105) を使用して極限値 (7.2.106) を (7.2.107) で記述できる.

$$\lim_{\Delta t\to 0}c^2-\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right\}=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{c^2\cdot\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t}\right)^2\right\}\cdots(7.2.106)$$

$$c^2-\left\{\left(v_x(t)\right)^2+\left(v_y(t)\right)^2+\left(v_z(t)\right)^2\right\}=c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.2.107)$$

慣性座標系 S 内での質点の速度ベクトルは (7.2.108) で記述できるものとする. (7.2.108) の左辺を (7.2.107) の左辺

の第２項に代入すると（7.2.109）に記述できる．(7.2.109）から（7.2.110）を導出できる．(7.2.110）の右辺に微分係数が記述されている．

$$\left(v(t)\right)^2=\left(v_x(t)\right)^2+\left(v_y(t)\right)^2+\left(v_z(t)\right)^2\cdots(7.2.108)$$

$$c^2-\left(v(t)\right)^2=c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.2.109)$$

$$1-\frac{\left(v(t)\right)^2}{c^2}=\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.2.110)$$

（7.2.9）のような微分係数を（7.2.110）から導出する際に，(7.2.110）の右辺の微分係数に付ける符号を決定する必要がある．(7.2.110）の左辺に記述した質点の速度ベクトルの成分を使用して，その符号を決定できる．

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},(\mathrm{d}t\neq 0)\cdots(7.2.9)$$

質点の速度ベクトルのｘ軸成分(7.2.111)を使用して,(7.2.110)の右辺の微分係数に付ける符号を考察する.(7.2.111)の左辺は，慣性座標系 S_1 内を等速度運動する慣性座標系 S の速度ベクトルのｘ軸成分である．(7.2.111）の右辺の変数は慣性座標系 S 内を等速度運動する慣性座標系 S_1 の速度ベクトルのｘ軸成分である．

$$v_{x1}=-v_x\cdots(7.2.111)$$

（7.2.111）の両辺は，(7.2.112）に書き直すことができる．(7.2.112）に（7.2.113）を仮定する．

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=-\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.2.112)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=-\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}>0\cdots(7.2.113)$$

一般には（7.2.114）が成立する．(7.2.114）が成立するならば，(7.2.113）から（7.2.115）になる．

$$\mathrm{d}x_1(t_1)>0\cdots(7.2.114)$$

$$-\mathrm{d}x(t)>0\cdots(7.2.115)$$

（7.2.115）から（7.2.116）を導出できる．(7.2.116）を使用して，(7.2.112）を（7.2.117）に書き換える．

$$\mathrm{d}x(t)<0\cdots(7.2.116)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}x(t)}=-\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t}\cdots(7.2.117)$$

（7.2.114）を仮定しているので（7.2.117）の符号は（7.2.118）になる．(7.2.118）から微分係数の符号（7.2.119）を記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}x(t)}=-\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t}<0\cdots(7.2.118)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t}>0\cdots(7.2.119)$$

次に，(7.2.120）を仮定する．一般には（7.2.121）が成立する．(7.2.121）が成立するならば，(7.2.121）から（7.2.122）になる．(7.2.122）を使用して，(7.2.120）を（7.2.123）に書き換える．(7.2.122）を仮定しているので（7.2.123）の符号になる．(7.2.123）から微分係数の符号（7.2.119）を記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=-\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}<0\cdots(7.2.120)$$

$\mathrm{d}x_1(t_1) < 0 \cdots (7.2.121)$
$\mathrm{d}x(t) > 0 \cdots (7.2.122)$

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}x(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.123)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.119)$$

（7.2.124）の左辺は，慣性座標系 S_1 内を等速度運動する慣性座標系 S の速度ベクトルの y 軸成分である．（7.2.124）の右辺の変数は慣性座標系 S 内を等速度運動する慣性座標系 S_1 の速度ベクトルの y 軸成分である．

$v_{y1} = -v_y \cdots (7.2.124)$

（7.2.124）の両辺は，（7.2.125）に書き直すことができる．（7.2.125）に（7.2.126）を仮定する．

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = -\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.125)$$

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = -\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.126)$$

一般には（7.2.127）が成立する．（7.2.127）が成立するならば，（7.2.126）から（7.2.128）になる．

$\mathrm{d}y_1(t_1) > 0 \cdots (7.2.127)$
$-\mathrm{d}y(t) > 0 \cdots (7.2.128)$

（7.2.128）から（7.2.129）を導出できる．（7.2.129）を使用して，（7.2.125）を（7.2.130）に書き換える．

$\mathrm{d}y(t) < 0 \cdots (7.2.129)$

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t_1)}{\mathrm{d}y(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.130)$$

（7.2.127）を仮定しているので（7.2.130）の符号は（7.2.131）になる．（7.2.131）から微分係数の符号（7.2.119）を記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t_1)}{\mathrm{d}y(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.131)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.119)$$

次に，（7.2.132）を仮定する．一般には（7.2.133）が成立する．（7.2.133）が成立するならば，（7.2.132）から（7.2.134）になる．（7.2.134）を使用して，（7.2.132）を（7.2.135）に書き換える．（7.2.133）を仮定しているので（7.2.135）の符号になる．（7.2.135）から微分係数の符号（7.2.119）を記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = -\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.132)$$

$\mathrm{d}y_1(t_1) < 0 \cdots (7.2.133)$
$\mathrm{d}y(t) > 0 \cdots (7.2.134)$

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t_1)}{\mathrm{d}y(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.135)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.119)$$

（7.2.136）の左辺は，慣性座標系 S_1 内を等速度運動する慣性座標系 S の速度ベクトルの z 軸成分である．（7.2.136）の右辺の変数は慣性座標系 S 内を等速度運動する慣性座標系 S_1 の速度ベクトルの z 軸成分である．

$$v_{z1} = -v_z \cdots (7.2.136)$$

（7.2.136）の両辺は，（7.2.137）に書き直すことができる．（7.2.137）に（7.2.138）を仮定する．

$$\frac{\mathrm{d}z_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = -\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.137)$$

$$\frac{\mathrm{d}z_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = -\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.138)$$

一般には（7.2.139）が成立する．（7.2.139）が成立するならば，（7.2.138）から（7.2.140）になる．

$$\mathrm{d}z_1(t_1) > 0 \cdots (7.2.139)$$

$$-\mathrm{d}z(t) > 0 \cdots (7.2.140)$$

（7.2.140）から（7.2.141）を導出できる．（7.2.141）を使用して，（7.2.137）を（7.2.142）に書き換える．

$$\mathrm{d}z(t) < 0 \cdots (7.2.141)$$

$$\frac{\mathrm{d}z_1(t_1)}{\mathrm{d}z(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.142)$$

（7.2.139）を仮定しているので（7.2.142）の符号は（7.2.143）になる．（7.2.143）から微分係数の符号（7.2.119）を記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}z_1(t_1)}{\mathrm{d}z(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.143)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.119)$$

次に，（7.2.144）を仮定する．一般には（7.2.145）が成立する．（7.2.145）が成立するならば，（7.2.144）から（7.2.146）になる．（7.2.146）を使用して，（7.2.144）を（7.2.147）に書き換える．（7.2.145）を仮定しているので（7.2.147）の符号になる．（7.2.147）から微分係数の符号（7.2.119）を記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}z_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = -\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.144)$$

$$\mathrm{d}z_1(t_1) < 0 \cdots (7.2.145)$$

$$\mathrm{d}z(t) > 0 \cdots (7.2.146)$$

$$\frac{\mathrm{d}z_1(t_1)}{\mathrm{d}z(t)} = -\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} < 0 \cdots (7.2.147)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t} > 0 \cdots (7.2.119)$$

（7.2.119）を使用すると，（7.2.110）は微分係数（7.2.148）に記述できる．（7.2.148）を使用すると，時点の微分（7.2.149）を記述できる．

$$1 - \frac{(v(t))^2}{c^2} = \left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdots (7.2.110)$$

$$\sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.148)$$

$$\mathrm{d}t_1(t)=\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}\cdot \mathrm{d}t\cdots(7.2.149)$$

（7.2.52）は慣性座標系 S の時間である．この時間（7.2.52）は時点の微分（7.2.149）の独立変数となる時間である．このことで，独立変数となる慣性座標系 S の時点の微分を（7.2.7）で記述できる．

$$\Delta t=h\cdots(7.2.52)$$

$$\mathrm{d}t=h\cdots(7.2.7)$$

時間（7.2.7）を（7.2.149）の右辺に代入すると慣性座標系 S_1 の微分（7.2.150）になる．慣性座標系 S の時間（7.2.52）の左辺を使用すると，慣性座標系 S_1 の微分（7.2.150）は（7.2.151）に記述できる．微分の定義では，慣性座標系 S_1 の時点の微分は（7.2.6）で記述できる．（7.2.150）を（7.2.152）と比較すると，微分係数（7.2.61）は（7.2.152）で記述できることがわかる．

$$\mathrm{d}t_1(t)=\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}\cdot h\cdots(7.2.150)$$

$$\mathrm{d}t_1(t)=\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}\cdot \Delta t\cdots(7.2.151)$$

$$\mathrm{d}t_1(t)=\lim_{h\to 0}\frac{t_1(t+h)-t_1(t)}{h}\cdot h\cdots(7.2.6)$$

$$t_1{}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{t_1(t+h)-t_1(t)}{h}\cdots(7.2.61)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{t_1(t+h)-t_1(t)}{h}=\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}\cdots(7.2.152)$$

微分係数 (7.2.152) の左辺が (7.2.153) である場合を考える．(7.2.152) の右辺を使用すると (7.2.153) では (7.2.154) を記述できる．

$$\lim_{h\to 0}\frac{t_1(t+h)-t_1(t)}{h}=0\cdots(7.2.153)$$

$$\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}=0\cdots(7.2.154)$$

（7.2.154）から（7.2.155）を導出できる．質点が慣性座標系 S 内を真空中の光の速さ（7.2.156）で移動すると微分係数（7.2.157）になる．（7.2.157）では極値を意味する．

$$v(t)^2=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2=c^2\cdots(7.2.155)$$

$$v(t)=c\cdots(7.2.156)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}=0\cdots(7.2.157)$$

（7.2.157）では，(7.2.154) を仮定した．(7.2.154) では慣性座標系 S の時間 (7.2.52) が (7.2.158) であっても (7.2.157) は成立する．

$$h\neq 0\cdots(7.2.158)$$

特殊相対性理論の静止質量には以下のような問題を著者は考える．そのような問題が未解決では，静止している図 7.1.1 の時計内の送信機から光が送り出されないことを保証できないものと２０１０年現在の著者は考える．光速度の不

変の原理では，すべての慣性座標系上では真空中の光は真空中の光の速さ（2.6）で等速度運動をする．慣性座標系 S 内で真空中の光の速さ（2.6）で移動する図 7.1.1 の時計は真空中の光ではない．このことから，もし慣性座標系 S_1 が真空中の光の速さ（2.6）で慣性座標系 S 内を等速度運動しているならば，図 7.1.1 の時計は慣性座標系 S_1 内で静止し続けられるものと扱える．慣性座標系 S 内で真空中の光の速さ（2.6）で等速度運動する図 7.1.1 の時計を観測すると，光速度の不変の原理のために７章１節で既に説明したように光が図 7.1.1 の y 軸方向に速度を持たない計算結果になる．図 7.1.1 の時計に零でない静止質量を仮定しても，静止質量の定義（3.7）では（7.2.156）を使用すると零である静止質量（7.1.63）になる．静止質量（7.1.63）は７章１節で光の静止質量を考察したときに計算したものである．静止質量の定義（3.7）では，真空中の光の速さ（7.2.156）で移動する質点の質量（7.2.59）が有限値になることを仮定すると，そのような質点の静止質量は常に零になってしまう．このことは，その質点が慣性座標系 S 内を質量（7.2.160）で移動している場合で計算した静止質量（3.2.161）とは異なる．著者が構築した本書の理論では真空中の光の速さで移動する質点の静止質量は零であるものと仮定している．このことでひとつの質点の速さが真空中の光の速さまで変化する場合を考える．この場合では，静止質量（7.1.63）が静止質量（3.2.161）に一致しないことで質点の静止質量を定数に仮定したことに整合していないものと指摘できる．

$$m_0 \equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0 \le v \le c)\cdots(3.7)$$

$$m_0 = m(c)\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} = 0\cdots(7.1.63)$$

$$m(c)\cdots(7.2.159)$$

$m(v)\neq 0,(v\neq c)\cdots(7.2.160)$ 真空中の光の速さで移動していない質点の質量

$m_0 = m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(v\neq c)\cdots(3.2.161)$ 真空中の光の速さで移動していない質点の静止質量

特殊相対性理論では，真空中の光の速さで移動する質点の質量（7.2.159）が不明であるならば静止質量（3.7）の計算ができない．静止質量の定義（3.7）を使用するための条件に質点の質量――（a.3.2）および（a.3.4）のことである．――および質点の速さ v を仮定している．(a.3.2) ――あるいは (a.3.4) ――の質点の質量は (a.3.1) ――あるいは (a.3.3) ――の質点の全エネルギーを仮定している．真空中の光の速さで移動する質点の全エネルギーを観測できるならば，その質点の質量（7.2.159）を計算できる．その質量（7.2.159）を使用して，静止質量を（3.7）で計算できる．その計算した静止質量が，実際に観測できる静止質量に一致するかは２０１０年現在の著者には不明である．質点の速さ（2.24）が相対論的質量（2.23）の定義区間内の実数であるならば，質点の速さは真空中の光の速さにはならない．真空中の光を質点として扱う際には区間（2.25）から外れることは，光速度の不変の原理から明らかである．

$$v = |\mathbf{v}| \in \mathbf{R},(v \ge 0)\cdots(2.24)$$

$$0 \le v < c\cdots(2.25)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdots(2.23)$$

これらの質量を計算する際に生じる問題に明らかな解決を２０１０年現在の著者は与えることはできない．このことからも本書では質点の質量は（a.3.2）――あるいは（a.3.4）――を仮定して，静止質量（3.7）を定義式として導入した．この特殊相対性理論での問題には，特に真空中の光の速さで移動する質点を扱う際には注意することになる．

質量に速度の影響で変化することを仮定した．そのことで，静止質量を定数として扱う場合を仮定した．このような

質量はニュートン力学の質量とは異なる．そのような新しい質量の考えを導入して，運動量をどのように扱うべきかを７章３節で考察する．７章２節で考察したように，質点が慣性座標系で静止している場合の質量は定数として扱われる．質点が静止している４次元時空の時点は，その質点が移動している４次元時空の時点とは異なる．このことでは，時点の変換がニュートン力学で使用したガリレイ変換とは異なった．そのように時点の変換が異なることで運動量に使用する質量を選択することが生じる．７章３節ではニュートン力学での質量について考えながら特殊相対性理論で使用する運動量について考察する．

7.3 ニュートン力学での慣性座標系および特殊相対性理論での慣性座標系での運動量の考察

擬リーマン計量が定義された４次元時空のベクトルである（7.2.10）および（7.2.11）を使用する．この議論ではベクトル（7.2.10）の４次元時空は慣性座標系 S の空間および時点で記述しているものとする．ベクトル（7.2.11）の４次元時空は慣性座標系 S_1 の空間および時点で記述しているものとする．

$(x, y, z, c \cdot t) \cdots (7.2.10)$

$(x_1, y_1, z_1, c \cdot t_1) \cdots (7.2.11)$

７章２節でアインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量は定数でなく (3.8) のような関数になることを仮定した．慣性座標系 S 内の質点の質量が（3.8）で，その質点の速度ベクトルが（2.16）である場合では，ニュートン力学の運動量のように質量および速度ベクトルを掛けることで（7.3.1）を運動量として考えることができる．（7.3.1）は特殊相対性理論で使用する運動量である．

$m(v), (0 \le v \le c) \cdots (3.8)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量

$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \cdots (2.16)$

$m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le c) \cdots (7.3.1)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量

特に，ベクトル（7.2.10）の時点の成分（7.3.2）の軸上での質点の運動量は（7.3.1）のように（7.3.3）で記述する．質点の全エネルギーを説明するのに，時点の成分の運動量（7.3.3）は７章４節で使用する．

$c \cdot t \cdots (7.3.2)$

$m(v) \cdot c, (0 \le v \le c) \cdots (7.3.3)$

慣性座標系では慣性の法則が成立することを仮定している．ニュートン力学の慣性座標系はアインシュタインの特殊相対性理論の慣性座標系とは異なることを既に説明している．ニュートン力学の慣性座標系の時点は，絶対時間を仮定していることで特殊相対性理論の時点とは異なった．ニュートン力学では絶対時間を絶対空間で使用していた．慣性の法則が成立する座標系を慣性座標系として見なすならば，絶対静止している絶対空間内に絶対静止しているユークリッド空間である座標系を仮定しても慣性座標系であるものと扱える．ニュートン力学の慣性座標系で使用していた運動量からアインシュタインの特殊相対性理論の慣性座標系で使用できる運動量を考察する．

ニュートン力学では，移動している質点の質量（7.3.4）は定数である．ニュートン力学での重力質量および慣性質量はそれぞれ定数として扱われる．重力質量が慣性質量に等しくないならば，ニュートン力学ではそれらの２つの質量を扱うことになる．一般には，ニュートン力学での重力質量および慣性質量は等しいものと扱われる．その扱いでは，質量はひとつの値に決定するものと考えらることもある．重力質量を観測するには万有引力の法則を使用することができる．万有引力を使用した観測結果は，その観測方法で異なる結果になることが物理理論から説明できる．このことは，術語としての重力質量の定義を含めて重力質量の値がひとつに決定できない問題を生じさせる．ニュートン力学の理論で重力質量の値が仮定できても，観測での重力質量は自然現象を通じた観測結果である．ニュートン力学の重力理論では説明できていない自然現象の影響が観測に反映されている場合には，ニュートン力学の理論値は観測結果よりも厳密

な重力質量の値にはならない余地が生じる．このことは，慣性質量を観測する際に使用するニュートンの運動方程式で使用する合力の観測方法にも同様のことが言える．重力質量および慣性質量の両方で，いくつかの質量の値が観測結果として得ることでは質量の値をニュートン力学の理論で定数となるひとつに決定できない．一般に，ニュートン力学の理論では定数でひとつのみに決定する質量が定義されていない．

$m_{\mathrm{N0}} \cdots (7.3.4)$ ニュートン力学で使用する定数となる質量

アインシュタインの特殊相対性理論では質量は（a.3.3）で理論値を与えることができる．質量（a.3.3）では質点の全エネルギー（a.3.1）から値を決定できる．質点の全エネルギー（a.3.1）が変化するならば，質量（a.3.3）の値も変化することになる．特殊相対性理論では重力場は仮定されていないので，重力質量を観測する理論を与えていない．このことでは，特殊相対性理論では慣性質量のみを扱っていることを意味する．質点の全エネルギー（a.3.1）には運動エネルギーが含まれている．運動エネルギーは質点の速さで変化する．このことからも，慣性質量（a.3.3）が定数ではないことを意味する．ニュートンの運動方程式から観測する慣性質量は加速度運動している質点の質量を観測するものである．このことでは，変数となる質量を扱う特殊相対性理論の慣性質量（3.8）はニュートン力学の慣性質量（7.3.4）とは一致しないことを説明できる．この不一致（7.3.5）では，ニュートン力学の慣性質量は特殊相対性理論の静止質量であるものとは扱うことはできない．

$m_{\mathrm{N0}} \neq m(v) \cdots (7.3.5)$

　静止質量については（3.7）の右辺に記述してある微分係数（7.2.148）が（5.50）を満足する場合で，質量（3.8）は静止質量（3.7）とは近似の値になることを（7.3.6）のように導出できる．（7.3.6）では（7.3.7）に書き直すことができる．

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v \le c) \cdots (3.7)$$

$$\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.148)$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \fallingdotseq 1 \cdots (5.50) \text{仮定}$$

$$m(v) \approx m(v) \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdots (7.3.6)$$

$m_0 \approx m(v) \cdots (7.3.7)$ 特殊相対性理論での質量の近似式

一般には，特殊相対性理論の静止質量はニュートン力学の定数となる質量とは等しいものに扱うことができない．ローレンツ変換がガリレイ変換に近似できる質点の速さの場合は，（5.50）を満足するものと扱える．（5.50）を満足する場合は（7.3.7）に記述できる．（7.3.7）の左辺は，質点が慣性座標系 S_1 で静止している場合の静止質量である．ニュートン力学での重力質量は慣性座標系内の質点が静止していることでも観測できる質量である．この意味では，重力質量は静止質量であるものと考えることができる．ニュートン力学の重力質量には上述のようにひとつの値に定義できる理論が与えられていない．慣性質量を観測する際に（5.50）を満足する加速度運動している質点の質量（3.8）はひとつの値に定義できない．このように，ニュートン力学での質量はひとつの値に定義できる特殊相対性理論の静止質量とは（5.50）を満足すると（7.3.8）のように近似の値になるものと一般に考えることができる．ニュートン力学の質量がひとつの値に定義できないことで生じるずれのために，（7.3.8）は常に成立することは説明できない．そして，静止質量に等しくなる場合を（7.3.9）のように考えることができる．

$m_{\mathrm{N0}} \approx m_0 \cdots (7.3.8)$ ニュートン力学での質量（7.3.4）および特殊相対性理論での質量（3.7）の近似式

$m_{\mathrm{N}0} = m_0 \cdots (7.3.9)$仮定

静止質量の定義（3.7）の右辺には微分係数（7.2.148）が記述されている．微分係数（7.2.148）の右辺を静止質量の定義（3.7）の右辺に代入すると静止質量（7.3.10）を記述できる．(7.3.10）は，質量（3.8）を静止質量に変換する式であるものと解釈できる．

$m_0 = m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}, (0 \le v \le c) \cdots (7.3.10)$

質量の変換（7.3.10）では時点の微分係数（7.2.148）を使用している．ニュートン力学の質量に近似する特殊相対性理論の質量（7.3.11）は条件（5.50）を満足する．そして，時点の微分係数（7.2.148）で質量（3.8）を小さくする影響を大きく受けないで近似の式（7.3.7）を満足する．特殊相対性理論の質量である関数（3.8）の区間内で条件（5.50）を満足する変動を仮定すると，(7.3.11）では（7.3.8）あるいは（7.3.9）を満足する．

$m_{\mathrm{N}0} \approx m(v) \cdots (7.3.11)$

（7.3.12）はニュートン力学での運動量である．ニュートン力学での運動量（7.3.12）では質点の速さは∞も許容している．このことは，特殊相対性理論の運動量（7.3.1）とは異なる箇所のひとつである．

$m_{\mathrm{N}0} \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v) \cdots (7.3.12)$ニュートン力学での運動量

$m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le c) \cdots (7.3.1)$特殊相対性理論での運動量

慣性座標系 S で条件（5.50）を満足する質点の速さの最大値は（7.3.13）で示す．近似式（3.3.7）を満足する場合には運動量（7.3.1）を（7.3.14）で（7.3.15）のように近似できる．(7.3.15）の左辺では，慣性座標系 S 内で移動する質点の速度ベクトルが慣性座標系 S_1 内で静止するその質点の静止質量に掛けられている．(7.3.11）が成立する場合には，運動量を（7.3.16）のように近似できる．一般には，(7.3.8）あるいは（7.3.9）の場合では，(7.3.16）を記述できる．

$v_c \cdots (7.3.13)$

$m_0 \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.3.14)$静止質量で記述した特殊相対性理論での運動量

$m_0 \cdot \mathbf{v}(t) \approx m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.3.15)$

$m_{\mathrm{N}0} \cdot \mathbf{v}(t) \approx m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.3.16)$

（7.3.15）の右辺は，特殊相対性理論で導入した運動量である．その質量は本書では（3.8）で仮定した．(7.3.16）の左辺のニュートン力学での運動量のように (7.3.15) の左辺は定数として扱う静止質量を使用している．(7.3.15）および（7.3.16）では，ニュートン力学の運動量（7.3.12）に近似している運動量として（7.3.14）を（7.3.17）のように扱うことが一般にできる．本書ではアインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量（7.3.1）を考察する際に，(7.3.14）を使用することがある．

$m_{\mathrm{N}0} \cdot \mathbf{v}(t) \approx m_0 \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.3.17)$

ニュートン力学の時点はすべての慣性座標系で等しいことを仮定している．このことは，特殊相対性理論の時点とは著しく異なる箇所である．質点が静止している慣性座標系 S_1 の時点の微分（7.2.151）は質点が移動している慣性座標系 S の時間との変換を記述している．このような時間との変換では，慣性座標系 S_1 の時点の微分は慣性座標系 S の時間に近似した値を示す場合がある．その場合では条件（5.50）が成立して，特殊相対性理論の時点の変換はニュートン力学の時点の変換に近似していることを後で説明する．条件（5.50）でのニュートン力学の運動量（7.3.12）は特殊相対性理論の運動量 (7.3.1) とは近似の値になることを示せた．ニュートン力学での質量 (7.3.4) がひとつの値に定まらないことを説明できた．ニュートン力学の運動量（7.3.12）がひとつに定まらないことで，特殊相対性理論の運動量 (7.3.1) とのずれた値の分に対する扱いは不明確である．特殊相対性理論の運動量 (7.3.1) の方が客観性の高い数字であるものと考えることはできる．２つの慣性座標系でのそれぞれの時点が近似している

場合で考える運動量（7.3.14）から特殊相対性理論でのみ扱える運動量（7.3.1）へと考察を進めることにする．

$$\mathrm{d}t_1(t)=\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}\cdot\Delta t\cdots(7.2.151)$$

ニュートン力学での質量は重力を使用して質量 (7.3.4) を測定するのに物体が静止し続けている状態で測定ができる．質点が静止し続けることでは慣性の法則を満足する必要がある．ニュートン力学での慣性座標系では，その慣性座標系内での質点の速度を仮定している．ニュートン力学での慣性座標系の時点ではガリレイ変換の時点の式（7.3.18）を使用する．著者の記憶では，ニュートン力学での変換の式には（7.3.19）として記述する文献もある．ここでは，（7.3.19）の右辺の第２項（7.3.20）について考える．ガリレイ変換の時点の式（7.3.18）では，慣性の法則が成立する慣性座標系上での質点の静止が他の慣性座標系上では等速度運動することを説明できる．

$t_1=t\cdots(7.3.18)$ ガリレイ変換の時点の式

$t_1=t+a_t\cdots(7.3.19)$

$a_t\cdots(7.3.20)$

ニュートン力学の慣性座標系 S 内を慣性座標系 S_1 が x 軸方向に等速度の速さ v で移動していることを仮定する．（7.3.21）はガリレイ変換の x 軸の式である．（7.3.22）はガリレイ変換の y 軸の式である．（7.3.23）はガリレイ変換の z 軸の式である．

$x_1=x-v\cdot t\cdots(7.3.21)$ ガリレイ変換の x 軸の式

$y_1=y\cdots(7.3.22)$ ガリレイ変換の y 軸の式

$z_1=z\cdots(7.3.23)$ ガリレイ変換の z 軸の式

絶対空間での時点は外部からの影響を受けない絶対時間で与える時点である．絶対時間の時点は外部からの影響を受けないので，時点の進みは常に等しい．他の慣性座標系の時点との差は勝手に与えることで，各慣性座標系間の時点のずれ（7.3.20）が一様に定まらなくなる．（7.3.19）を（7.3.24）に書き換える．慣性座標系 S と慣性座標系 S_1 の時点のずれを (7.3.25) で仮定する．このずれ (7.3.25) には (7.3.26) が成立することを仮定する．ずれ (7.3.25) は，ずれ (7.3.20) とは異なることを（7.3.26）では意味する．（7.3.25）を使用するとニュートン力学での時点の変換の式は（7.3.27）で記述できる．

$t_1-a_t=t\cdots(7.3.24)$

$a_{t1}\cdots(7.3.25)$

$a_t\neq a_{t1}\cdots(7.3.26)$

$t_1=t+a_{t1}\cdots(7.3.27)$

(7.3.27) を (7.3.28) に書き換える．(7.3.24) および (7.3.28) の右辺は慣性座標系 S の時点である．このことで，(7.3.29) を記述できる．（7.3.29）から（7.3.30）を導出できる．（7.3.30）は仮定（7.3.26）には一致しない．（7.3.30）では，慣性座標系 S と慣性座標系 S_1 の時点のずれは等しく（7.3.20）になることを意味する．（7.3.26）が成立する場合は，慣性座標系 S_1 の時点 t_1 がひとつの値に定まるならば（7.3.24）の左辺は（7.3.28）の左辺には等しくないことは明らかである．このことは，慣性座標系 S の時点 t の値が２つ与えられることになる．このことはニュートン力学の時点の変換が絶対時間で与えられることに反する．ここでは，ひとつの慣性座標系の時点に複数のずれを仮定することは絶対空間の時点が複数存在することを意味する．このことは，絶対時間の仮定に反する．

$t_1-a_{t1}=t\cdots(7.3.28)$

$t_1-a_{t1}=t_1-a_t\cdots(7.3.29)$

$a_t = a_{t1} \cdots (7.3.30)$

ニュートン力学のひとつの慣性座標系に複数の時点が対応することを仮定すると，慣性の法則が成立しなくなることを次のように説明できる．例えば，慣性座標系Ｓに（7.3.31）を満足する時点t_2を仮定する．慣性座標系Ｓに時点の変換（7.3.32）を仮定する．（7.3.32）の右辺の時点が仮定されると，ｘ軸の変換（7.3.33）を記述できるものと仮定する．

$t \neq t_2 \cdots (7.3.31)$

$t_1 = t_2 + a_t \cdots (7.3.32)$

$x_1 = x - v \cdot t_2 \cdots (7.3.33)$

（7.3.19）の両辺の時点に微分（7.3.34）を記述できる．（7.3.32）の両辺の時点に微分（7.3.35）を記述できる．（7.3.34）および（7.3.35）を使用すると，微分の関係（7.3.36）を導出できる．

$\mathrm{d}t_1 = \mathrm{d}t \cdots (7.3.34)$

$\mathrm{d}t_1 = \mathrm{d}t_2 \cdots (7.3.35)$

$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_2 \cdots (7.3.36)$

（7.3.21）から速度ベクトルのｘ軸の成分を（7.3.37）で記述できる．（7.3.33）から速度ベクトルのｘ軸の成分を（7.3.38）で記述できる．（7.3.37）および（7.3.38）の左辺は等しいので，（7.3.39）を記述できる．（7.3.36）を使用すると（7.3.39）は（7.3.40）に書き直せる．（7.3.40）では，ひとつの慣性座標系Ｓ上での異なる２つの時点に同じ速度をもつことになる．異なる２つの時点にそれぞれ他の異なる時点が対応することになる．それらの他の異なる時点にも（7.3.40）が成立する．ひとつの質点が加速度運動している場合は，その質点は同じ速度では一般には移動しない．このことは，ひとつの質点が同時に（7.3.40）の速度および他の速度で移動することを意味する場合にも採用できる．著者の採用している速度の定義では，ニュートン力学ではひとつの質点に２つ以上の速度を同時に定義することはできない．一般に，ひとつの質点が同時に同じｘ軸上の異なる２つ以上の位置に存在することはニュートン力学では説明できない．等速度運動している質点は異なる時点に同じ等速度で移動していることは明らかである．

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - v \cdots (7.3.37)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = \frac{\mathrm{d}x(t_2)}{\mathrm{d}t_2} - v \cdots (7.3.38)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t_2)}{\mathrm{d}t_2} \cdots (7.3.39)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t_2)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.3.40)$$

速度ベクトルのｘ軸成分の変換（7.3.37）から加速度ベクトルのｘ軸成分の変換（7.3.41）を導出できる．速度ベクトルのｘ軸成分の変換（7.3.38）から加速度ベクトルのｘ軸成分の変換（7.3.42）を導出できる．（7.3.41）および（7.3.42）の左辺は等しいので，（7.3.43）を記述できる．（7.3.36）を使用すると（7.3.43）を（7.3.44）に書き直すことができる．（7.3.44）では，ひとつの慣性座標系上での異なる２つの時点に同じ加速度を質点がもつことになり，一般の質点の運動を説明することはできない．慣性座標系内でのひとつの質点の運動の加速度が変換式の加速度に一致しないことを意味する．この２つの加速度で同時にひとつの質点が移動する場合を意味することもある．このことでは，質点が等速度運動している時間に，加速度運動もしていることを意味することすら考えられる．このようなことは，慣性の法則を満足していない．著者の採用している加速度の定義では，ニュートン力学でひとつの質点に２つ以上の加速度を同時に定義することはできない．

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\cdots(7.3.41)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}^2x(t_2)}{\mathrm{d}{t_2}^2}\cdots(7.3.42)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x(t_2)}{\mathrm{d}{t_2}^2}\cdots(7.3.43)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x(t_2)}{\mathrm{d}t^2}\cdots(7.3.44)$$

（7.3.21）の左辺および（7.3.33）の左辺は等しい位置を示している．これらの２式から（7.3.45）を記述できる．（7.3.45）では（7.3.46）を導出できる．（7.3.46）は（7.3.31）に反する．（7.3.46）が成立するならば慣性座標系 S で使用できる時点はひとつのみである．（7.3.31）では２つの時点を仮定していた．（7.3.31）で２つの時点を決定する方法を与えていない．そして，２つの時点を与える際に外部の影響を受ける時点が与えられる余地がある．このことは，絶対時間の仮定に反する．

$$x-v\cdot t=x-v\cdot t_2\cdots(7.3.45)$$

$$t=t_2\cdots(7.3.46)$$

このようなニュートン力学の時点の変換についての考察では，慣性座標系 S の時点tはひとつのみであり，ニュートン力学の時点の変換でのずれ（7.3.20）には（7.3.47）を仮定することで解決する．一般には，ニュートン力学で使用する慣性座標系ではガリレイ変換の時点の式（7.3.18）が時点の変換になる．

$$a_t=0\cdots(7.3.47)$$

$t_1=t\cdots(7.3.18)$ガリレイ変換の時点の式

（7.3.18）が成立するならば（7.3.48）を記述できる．ガリレイ変換の時点の式（7.3.18）を使用する各慣性座標系の時計は同期しており常に時点（7.3.18）および時間（7.3.48）が成立する．このことはガリレイ変換の線形性からも説明できる．(7.3.18)は２つの慣性座標系の時点が等しいことを示している．時点の関係(7.3.18)を使用すると微分係数(7.3.49)を導出できる．（7.3.49）を使用すると慣性座標系 S_1 の時点の微分（7.3.50）を記述できる．（7.3.48）および（7.3.50）を使用すると，(7.3.51)を記述できる．（7.3.51）では，慣性座標系 S_1 の時点の微分は時間に等しいことを示している．

$$\Delta t_1=\Delta t\cdots(7.3.48)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{t_1(t+h)-t_1(t)}{h}=1\cdots(7.3.49)$$

$$\mathrm{d}t_1=\Delta t\cdots(7.3.50)$$

$$\mathrm{d}t_1=\Delta t_1\cdots(7.3.51)$$

そのような時点および慣性座標系の位置の情報を使用したニュートン力学の運動量（7.3.12）として（7.3.14）を扱うことは，ニュートン力学での運動量の一般的な解釈では可能であるものと著者は考える．そのようなニュートン力学での解釈では，運動量に（7.3.17）の近似の関係を明示しないで（7.3.14）に等しいものとして扱うこともできる．実際，ニュートン力学での質量が理論で一意に定まらない．

$m_{\mathrm{N0}}\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v)\cdots(7.3.12)$ニュートン力学での運動量

$m_0\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.14)$静止質量で記述した特殊相対性理論での運動量

$$m_{\mathrm{N0}}\cdot\mathbf{v}(t)\approx m_0\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.17)$$

一般相対性理論およびニュートン力学でも重力質量が慣性質量に等しい場合を説明している．このことを導入することで，その重力質量を慣性質量として扱うことができる．そして，その重力質量を静止質量（7.3.52）として見なすことで静止質量（7.3.52）をニュートン力学での質量（7.3.4）として見なすことができる．この場合では（7.3.9）が成立していることになる．（7.3.52）は（7.3.53）で記述できる．（7.3.53）の右辺では，微分係数（7.2.148）を記述している．

$$m_0 = m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.52)$$

$m_{\mathrm{N0}}\cdots(7.3.4)$ニュートン力学で使用する定数となる質量

$m_{\mathrm{N0}} = m_0\cdots(7.3.9)$仮定

$$m_0 = m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.53)$$

$$\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.2.148)$$

アインシュタインの特殊相対性理論の（7.2.148）では，質点が静止している慣性座標系の時点は質点が移動している慣性座標系の時点とは異なるものとして扱うことができる．ニュートン力学では，（7.3.18）のようにすべての慣性座標系の時点を一致させられることから特殊相対性理論の時点とは異なることは明らかである．このことは，ローレンツ変換の時点の式（7.3.54）がガリレイ変換の時点の式（7.3.18）とは異なることからも明らかである．質点が慣性座標系 S 内を移動している時間Δtは（7.2.151）のように，その質点が静止している慣性座標系 S_1 の時点の微分を記述できる．一般に（5.50）が成立する場合では（7.2.151）は（7.3.55）に記述できる．（7.3.55）を使用すると（7.3.56）を記述できる．（7.3.56）では慣性座標系 S_1 の時点は慣性座標系 S の時点に近似していることを示している．

$t_1 = a_{41}\cdot x + a_{42}\cdot y + a_{43}\cdot z + a_{44}\cdot t\cdots(7.3.54)$ローレンツ変換での時点の式

$$\mathrm{d}t_1(t) = \sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}\cdot\Delta t\cdots(7.2.151)$$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \fallingdotseq 1\cdots(5.50)$仮定

$$\mathrm{d}t_1(t)\approx\Delta t\cdots(7.3.55)$$

$$t_1\approx t\cdots(7.3.56)$$

特殊相対性理論の運動量(7.3.1)の x 軸成分を(7.3.57)で記述する．運動量として扱う(7.3.14)の x 軸成分を(7.3.58)で記述する．（7.3.57）および（7.3.58）を使用すると，近似式（7.3.15）の x 軸の成分は近似式（7.3.59）として記述できる．

$m(v)\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v\le c)\cdots(7.3.1)$アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.57)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.58)$$

$$m_0\cdot\mathbf{v}(t)\approx m(v)\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.15)$$

$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\approx m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.59)$運動量の近似式

（7.3.59）が成立する速さの区間内で（7.3.9）を仮定して，運動量として（7.3.60）を記述できるものとする．運動量（7.3.60）のx軸の成分は（7.3.61）に記述できる．

$m_{\mathrm{N}0}=m_0 \cdots(7.3.9)$ 仮定

$m_{\mathrm{N}0}\cdot\mathbf{v}(t)=m_0\cdot\mathbf{v}(t),\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.60)$

$$m_{\mathrm{N}0}\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.61)$$

（7.3.61）の左辺はニュートン力学の運動量である．（7.3.61）のようにニュートン力学の運動量に等しいものと扱える特殊相対性理論の静止質量を使用した運動量の考察をする．静止質量の定義（3.7）を使用すると，（7.3.52）は運動量の関係式（7.3.61）が成立する質点の速さの区間での静止質量である．

$$m_0\equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\left(0\le v\le c\right)\cdots(3.7)$$

$$m_0=m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.52)$$

（7.3.61）の右辺の運動量に（7.3.62）の合成関数の微分法を仮定する．（7.3.62）の左辺に静止質量（7.3.52）を代入すると（7.3.63）を記述できる．

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.62)$$

$$m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.63)$$

（7.3.63）の右辺には微分係数（7.2.148）の右辺が表示されている．（7.3.63）の右辺に微分係数（7.2.148）の左辺を代入すると（7.3.64）になる．（7.3.64）は（7.3.65）に書き直すことができる．方程式（7.3.66）が常に成立するならば方程式（7.3.65）が常に成立する．

$$\sqrt{1-\frac{\left(v(t)\right)^2}{c^2}}=\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.2.148)$$

$$m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.64)$$

$$\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0,\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.65)$$

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=0,\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.66)$$

方程式（7.3.66）から（7.3.67）を導出できる．（7.3.67）の左辺は特殊相対性理論の運動量（7.3.1）のx軸成分である．ただし，運動量（7.3.1）を使用する速さの区間が異なる．

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.67)$$

$m(v)\cdot\mathbf{v}(t),\left(0\le v\le c\right)\cdots(7.3.1)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量

（7.3.61）の右辺には静止質量（7.3.52）を表示している．（7.3.68）は質点が静止している慣性座標系 S_1 の時点を使用して記述した慣性座標系Sの速度ベクトルのx軸成分として解釈できる．質量と速度ベクトルを掛けており，（7.3.67）の左辺は運動量を示しているので（7.3.67）の右辺を運動量として考えることができる．

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdots(7.3.68)$$

（7.3.68）を使用して，そのような速度ベクトルを仮定すると（7.3.69）で記述できる．（7.3.62）の右辺に記述している微分係数（7.2.148）の逆関数は（7.3.70）で記述できる．（7.3.70）の右辺の分母に（7.2.148）を代入すると（7.3.71）になる．

$$\mathbf{v}_s(t_1)=\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdots(7.3.69)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.62)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.70)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(v(t))^2}{c^2}}},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.71)$$

（7.3.62）のような合成関数の微分法が成立することを仮定しているので，（7.3.67）の右辺の運動量は（7.3.72）で記述できる.(7.3.72)の両辺には静止質量を記述している.運動量のx軸成分(7.3.72)から速度ベクトルのx軸成分(7.3.73)を記述できる．（7.3.73）のような合成関数の微分法が成立することを仮定すると，（7.3.69）は（7.3.74）で記述できる．速度ベクトル(2.16)は(7.3.75)で記述できる.速度ベクトル(7.3.75)を使用すると，速度ベクトル(7.3.74)は(7.3.76)で記述できる．

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.72)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1},(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.73)$$

$$\mathbf{v}_s(t_1)=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(7.3.74)$$

$$\mathbf{v}(t)=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}\cdots(2.16)$$

$$\mathbf{v}(t)=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(7.3.75)$$

$$\mathbf{v}_s(t_1)=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\mathbf{v}(t)\cdots(7.3.76)$$

本書では（7.3.76）を使用して７章３節の後半で質点の全エネルギーを説明するのに使用する．（7.3.56）を仮定して，（7.3.69），（7.3.74）および（7.3.76）では慣性座標系 S_1 内では質点は静止していることを仮定している．

$$t_1\approx t\cdots(7.3.56)$$

微分係数（7.3.71）の定義区間を拡張して（7.3.77）を記述することができる．（7.3.77）の定義区間の表示では（2.24）を使用している．

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}<\infty,(0\le v<c)\cdots(7.3.77)$$

$v = |\mathbf{v}| \in \mathbf{R}, (v \geq 0) \cdots (2.24)$

（7.3.77）の速さの区間で，２０１０年現在の数学理論および物理学理論では運動量ベクトル（7.3.78）を仮定できる．運動量ベクトル（7.3.78）では（7.3.72）のような合成関数の微分法が成立することを仮定している．運動量ベクトル（7.3.78）の x 軸成分は（7.3.79）で記述できる．一般に（7.3.79）は（7.3.80）が成立する場合に計算可能である．

$m_0 \cdot \mathbf{v}_s(t_1), (0 \leq v < c) \cdots (7.3.78)$

$$m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, (0 \leq v < c) \cdots (7.3.79)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} \neq 0 \cdots (7.3.80)$$

（7.3.80）を仮定して，（7.3.79）から運動量（7.3.81）を記述できる．（7.3.81）は慣性座標系 S 内の質点の運動量として記述している．（7.3.81）の右辺の時点は，その質点が静止している慣性座標系 S_1 の時点である．慣性座標系 S_1 内で，その質点の質量は（7.3.81）の右辺の静止質量になる．（7.3.81）の右辺の質点の速さの範囲では，静止質量はニュートン力学の質量とは等しいものとは一般には扱えない．（7.3.81）の右辺の運動量は（7.3.81）の左辺の運動量に等しいもので，特殊相対性論で使用する（7.3.82）の運動量である．

$m(v) \cdot \mathbf{v}(t) = m_0 \cdot \mathbf{v}_s(t_1), (0 \leq v < c) \cdots (7.3.81)$

$m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \leq v < c) \cdots (7.3.82)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量

運動量（7.3.82）は運動量（7.3.1）のように真空中の光の速さの場合には使用できない．質点が真空中の光の速さである場合には仮定（7.3.80）を満足しなくなる．このことで，（7.3.81）の右辺の速度ベクトルを記述できなくなる．

$m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \leq v \leq c) \cdots (7.3.1)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量

運動量（7.3.81）の右辺での速度の時点は質点が静止している慣性座標系 S_1 の位置の時計の時点である．ガリレイ変換の時点（7.3.18）はすべての慣性座標系で同期していて一致していることは既に説明をした．すべての慣性座標系で時点が同期していることで，ニュートン力学の慣性座標系ではひとつの時計があることで時点を記録することができる．一方，特殊相対性理論での質点が静止している慣性座標系 S_1 の時計の時点は質点の静止している位置のひとつの時計の時点で与えることができる．後者ではこの質点の静止を仮定していることが，前者になるニュートン力学の慣性座標系の時計の時点とは異なる．このような慣性座標系の時計の与え方が，運動量（7.3.81）の右辺の記述でニュートン力学の運動量とは異なる箇所である．ガリレイ変換の時点の式（7.3.18）に近似する場合は（7.3.76）で時点の近似式（7.3.56）を仮定して示した．

$t_1 = t \cdots (7.3.18)$ ガリレイ変換の時点の式

微分係数（7.2.148）の極限値を計算する．（7.3.83）の場合は，その極限値は（7.3.84）になる．（7.3.84）の極限値の場合では微分係数（7.2.148）の左辺から仮定（7.3.80）を満足することは明らかである．

$$\sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.148)$$

$v \to c \cdots (7.3.83)$

$$\lim_{v \to c} \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \cdots (7.3.84)$$

（7.3.83）の場合での運動量（7.3.79）の極限値を考察する．（7.3.83）の場合では質点は慣性座標系 S 内を真空中の光の速さに限りなく近い速さで移動しているものとする．そのような場合では（7.3.79）の左辺に記述した質点の速度ベクトルの x 軸成分は（7.3.85）を満足する．

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},(0\le v<c)\cdots(7.3.79)$$

$$\lim_{v\to c}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ne 0,\lim_{v\to c}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ne\infty\cdots(7.3.85)\text{仮定}$$

（7.3.79）での（7.3.83）の極限値を記述すると（7.3.86）になる．慣性座標系 S 内の質点として扱う光が真空中の光の速さで移動する場合は，その光のエネルギーを（a.3.1）で計算できる．その光の慣性質量は（a.3.2）で記述できる．その質量は有限値であるものと一般に扱える――たとえば，光子のエネルギー（7.1.19）で与えることができる――．

$$\lim_{v\to c}\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\lim_{v\to c}\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right),(0\le v<c)\cdots(7.3.86)$$

$$E(c)=h\cdot\nu\cdots(7.1.19)\text{光子の持つエネルギー}$$

（7.3.86）の左辺は有限値の質量および有限値の速度の x 軸成分での積であるので（7.3.87）のような有限値になるものと仮定できる．（7.3.87）が成立するならば（7.3.86）の右辺は（7.3.88）で記述できる．

$$\lim_{v\to c}\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)=p_{cx},(0\le v<c,p_{cx}<\infty,p_{cx}\ne 0)\cdots(7.3.87)$$

$$\lim_{v\to c}\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\ne 0,(0\le v<c)\cdots(7.3.88)$$

（7.3.88）の左辺の速度ベクトルが（7.3.89）を満足するものと仮定すると，（7.3.88）の左辺の静止質量は（7.3.90）になるものと考えることができる．（7.3.88）の左辺ではが∞と極限値の 0 での積であるので不定形であるものと扱うことになる．（7.3.87）が成立するならば（7.3.88）は有限値になるものと扱える．このことでは，（7.3.89）および（7.3.90）を仮定することは物理理論と整合性を見ることができる．

$$\lim_{v\to c}\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\infty,(0\le v<c)\cdots(7.3.89)$$

$$\lim_{v\to c}m_0=0\cdots(7.3.90)$$

（7.3.83）での極限値を本書の静止質量の定義（3.7）で計算すると（7.3.91）になる．（7.3.91）は（7.3.90）に一致する計算結果である．（7.1.64）の場合は（7.1.63）になることは既に説明をした．

$$m_0\equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\le v\le c)\cdots(3.7)$$

$$\lim_{v\to c}m_0=\lim_{v\to c}\left(m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=0,(0\le v<c)\cdots(7.3.91)$$

$$v=c\cdots(7.1.64)$$

$$m_0=m(c)\cdot\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}}=0\cdots(7.1.63)$$

アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量（3.8）はニュートン力学の質量（7.3.4）とは異なる．質量が異なることで，それぞれの理論での運動量が異なることを 7 章 3 節で考察してきた．ニュートン力学の運動量（7.3.12）は

静止質量を使用した運動量とは（7.3.17）あるいは（7.3.60）で記述できる場合を既に説明した．それらの運動量を使用してニュートン力学で使用する運動方程式を記述して，質点に作用する合力を説明できることは明らかである．そのような運動量では質点の速さは区間 $0 \le v \le v_c$ 内に含まれる必要がある．

$m(v),(0 \le v \le c)\cdots(3.8)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量

$m_{\mathrm{N0}}\cdots(7.3.4)$ ニュートン力学で使用する定数となる質量

$m_{\mathrm{N0}} \cdot \mathbf{v}(t),(0 \le v)\cdots(7.3.12)$ ニュートン力学での運動量

$m(v) \cdot \mathbf{v}(t),(0 \le v \le c)\cdots(7.3.1)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動量

$m_{\mathrm{N0}} \cdot \mathbf{v}(t) \approx m_0 \cdot \mathbf{v}(t),(0 \le v \le v_c)\cdots(7.3.17)$

$m_{\mathrm{N0}} \cdot \mathbf{v}(t) = m_0 \cdot \mathbf{v}(t),(0 \le v \le v_c)\cdots(7.3.60)$

特殊相対性理論では，真空中の光の速さまで質点の速さを議論することができる．このことは，ニュートン力学の質点の速さが∞まで許容されるのに対しては著しく特徴的な箇所である．そのような質点の速さの一部の区間 $0 \le v \le v_c$ 内でのみニュートン力学と同様の運動方程式の記述での説明ができることで，特殊相対性理論の運動方程式に近似の関係を考えることになる．真空中の光の速さを含まない質点の速さの区間内で（7.3.79）が成立することは特殊相対性理論上では導出できた．

$$m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},(0 \le v < c)\cdots(7.3.79)$$

一般にアインシュタインが修正したニュートンの運動方程式は（7.3.79）の速さの区間内での議論である．７章３節の残りでは，そのような速さの区間内での特殊相対性理論の運動方程式の記述について考察する．そして，質点の全エネルギーとの関係を導出する．

　ニュートン力学の運動方程式との不一致から特殊相対性理論の運動方程式の導出を考えることになる．運動量の時間に対する変化率で定義する運動方程式は，アインシュタインの特殊相対性理論でもすべての慣性座標系で同様に記述できる表現である．ニュートン力学では，質量を観測する方法には運動方程式を使用する方法——慣性質量を観測する方法——と万有引力の法則を使用する方法——重力質量を観測する方法——が与えられている．ニュートン力学の運動量（7.3.92）を使用するとニュートンの運動方程式は（7.3.93）で記述できる．加速度ベクトル（7.3.94）を使用するとニュートンの運動方程式（7.3.93）は（7.3.95）で記述できる．ニュートンの運動方程式（7.3.95）の加速度（7.3.94）はガリレイ変換では各慣性座標系で等しいことを既に説明した．ニュートンの運動方程式（7.3.95）では加速度（7.3.94）で運動している質点の慣性質量が異なることで合力 $\mathbf{f}_{\mathrm{N}}$ は異なる．

$\mathbf{p}_{\mathrm{N}}(t) = m_{\mathrm{N0}} \cdot \mathbf{v}(t),(0 \le v)\cdots(7.3.92)$

$\mathbf{f}_{\mathrm{N}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{N}}(t)}{\mathrm{d}t},(0 \le v)\cdots(7.3.93)$ ニュートンの運動方程式

$$\mathbf{a}_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t},(0 \le v)\cdots(7.3.94)$$

$\mathbf{f}_{\mathrm{N}} = m_{\mathrm{N0}} \cdot \mathbf{a}_{\mathrm{N}},(0 \le v)\cdots(7.3.95)$

本書のアインシュタインの特殊相対性理論では運動量が（7.3.96）であるので，運動方程式を（7.3.97）で記述できる．運動方程式（7.3.97）は相対論的質量（2.23）を使用した運動量（2.20）～（2.22）で記述する運動方程式とは異なる．そのような運動方程式では運動量（2.20）～（2.22）は真空中の光の速さ（2.6）の場合を含んでいない．このことは，相対論的質量（2.23）の定義区間（2.25）に真空中の光の速さが含まれていないことで明らかである．著者の経験では，一般的なアインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動方程式は相対論的質量（2.23）を使用したものである．

$\mathbf{p}_{\mathrm{S}}(t) = m(v) \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le c) \cdots (7.3.96)$

$\mathbf{f} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{S}}(t)}{\mathrm{d}t}, (0 \le v \le c) \cdots (7.3.97)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動方程式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$p_x = m \cdot v_x \cdots (2.20)$
$p_y = m \cdot v_y \cdots (2.21)$
$p_z = m \cdot v_z \cdots (2.22)$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \ne 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$0 \le v < c \cdots (2.25)$

そのような運動方程式で扱うことはできない質点の速さ（7.1.64）の場合でも本書の運動方程式（7.3.97）は理論上では使用できる．本書では慣性質量を（3.8）で仮定して，静止質量を（3.7）で定義している．慣性質量は質点の全エネルギー（a.3.1）から（a.3.2）で計算する．静止質量を直接に静止エネルギーから計算する方法と静止質量の定義（3.7）から計算する方法を考えることができる．

$v = c \cdots (7.1.64)$

$m(v), (0 \le v \le c) \cdots (3.8)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v \le c) \cdots (3.7)$$

このような理論構築は著者が独自に試みたものである．このような理論では，質点の全エネルギー（a.3.1）を計算することは一般に困難であるが，物理学理論での各物理量の関係を知る上で参考になるものと著者は考える．本書のように理論構築することで，特殊相対性理論では質量の定義を与えることはできていない．この観点では，質量の定義を与えるには他の物理学理論を使用することになるものと考えられる．質点の全エネルギーを直接に知ることはできなくても，質点系のエネルギーの保存則を使用して，質点系のエネルギーの変化量から質点の全エネルギーの変化量を計算できる場合は考えられる．その質点の全エネルギーの変化量から質点の質量の変化量を理論上は計算できる．このようなことは，熱力学の第１法則からも理論上は同様に考えられる．

万有引力の法則はニュートンの運動方程式を使用して導出されるものである．アインシュタインの特殊相対性理論での慣性座標系では，上述のようにニュートンの運動方程式が修正されているのでニュートンの重力理論を与える万有引力の法則が使用できない問題が生じる．万有引力の法則が使用できないことから静止している質点の質量を観測する際に重力を使用したニュートン力学の方法が使用できない．アインシュタインの特殊相対性理論は撓まない慣性座標系，電磁気学および時計についての関係を扱う運動学――kinematics――を基礎にした研究報告で発表された理論である．アインシュタインの一般相対性理論では，重力を説明する際に加速度運動する座標系を使用する．そのような重力を扱う相対性理論の研究では，上述の運動学を基礎にした特殊相対性理論での計算を応用している．アインシュタインの考察では，仮定した加速度での速度に対応する特殊相対性理論の慣性座標系の計算を使用して慣性質量および重力質量が等しいことを論じている．

運動量（7.3.79）を使用した運動方程式の考察を続ける．この４次元時空では，４次元時空のベクトルである（7.2.10）

および（7.2.11）を記述できる．慣性座標系 S_1 では質点は静止し続けるものとする．

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},(0\le v<c)\cdots(7.3.79)$$

$$(x,y,z,c\cdot t)\cdots(7.2.10)$$

$$(x_1,y_1,z_1,c\cdot t_1)\cdots(7.2.11)$$

慣性座標系 S で仮定する４次元時空のベクトル（7.2.10）を慣性座標系 S_1 で仮定する４次元時空のベクトル（7.2.11）の時点 t_1 で微分をして（7.3.98）を記述できる．（7.3.98）を速度ベクトルとして扱う．速度ベクトル（7.3.98）を時点 t_1 で微分をして（7.3.99）を記述できる．（7.3.99）を加速度ベクトルとして扱う．

$$\mathbf{v}_{\mathrm{f1s}}=\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1},c\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdots(7.3.98)\text{速度ベクトル}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{f1s}}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)\cdots(7.3.99)\text{加速度ベクトル}$$

（7.3.79）の右辺の運動量は速度ベクトル（7.3.98）の x 軸成分に静止質量を掛けることで記述できる．そのように，速度ベクトル（7.3.98）に静止質量を掛けると（7.3.100）になる．（7.3.100）を運動量ベクトルとして扱う．

$$\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdots(7.3.100)\text{運動量ベクトル}$$

リーマン計量（7.2.107）を使用して速度ベクトル（7.3.98）および加速度ベクトル（7.3.99）の角度を考察する．リーマン計量が定義された４次元時空ではベクトルの大きさをリーマン計量で定義する．ユークリッド空間である３次元ベクトル空間で内積を使用して３次元ベクトルの大きさを定義した．特殊相対性理論で使用する４次元時空ではリーマン計量で内積に相当する計算ができる．そのような計算は双１次形式と呼ぶこともある．双１次形式は異なる２つのベクトル――２つとも零ベクトルでない．――で計算する．零ベクトルでない同じベクトルで計算する双１次形式を２次形式と呼ぶこともある．

$$c^2-\left\{(v_x(t))^2+(v_y(t))^2+(v_z(t))^2\right\}=c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.2.107)$$

ベクトル（7.2.10）は時点 t で微分をして速度ベクトル（7.3.101）を記述できる．ベクトル（7.2.11）は時点 t で微分をして速度ベクトル（7.3.102）を記述できる．速度ベクトル（7.3.101）の大きさの２乗は（7.2.107）の左辺である．速度ベクトル（7.3.102）の大きさの２乗は（7.2.107）の右辺である．

$$\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},c\right)\cdots(7.3.101)$$

$$\left(0,0,0,c\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(7.3.102)$$

微分係数（7.3.103）を使用して（7.2.107）を（7.3.104）に書き直す．（7.3.104）の左辺は（7.3.105）の左辺のように整理できる．（7.3.105）は合成関数の微分法の記述を使用して（7.3.106）に書き直せる．（7.3.106）の左辺の括弧内の合成関数の微分法を整理して（7.3.107）に書き直すことができる．

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}},(0\le v<c)\cdots(7.3.103)$$

$$c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-(v_x(t))^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-(v_y(t))^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-(v_z(t))^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2=c^2\cdots(7.3.104)$$

$$c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(v_x(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(v_y(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(v_z(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2=c^2\cdots(7.3.105)$$

$$c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2=c^2\cdots(7.3.106)$$

$$c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2=c^2\cdots(7.3.107)$$

（7.3.107）の両辺を時点 t_1 で微分をして（7.3.108）を記述できる．（7.3.108）の左辺は（7.3.109）になる．（7.3.109）の左辺を整理すると（7.3.110）に記述できる．

$$c^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2\right\}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2\right\}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2\right\}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)^2\right\}=0\cdots(7.3.108)$$

$$c^2\cdot2\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}-2\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}-2\cdot\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}-2\cdot\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=0\cdots(7.3.109)$$

$$c^2\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}-\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}-\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}-\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=0\cdots(7.3.110)$$

変換 (7.3.110) の左辺には速度ベクトル (7.3.98) および加速度ベクトル (7.3.99) の各成分が記述されている．(7.3.110) の右辺は零であり，速度ベクトル（7.3.98）および加速度ベクトル（7.3.99）が直交することが示されている．(7.3.110) のような双１次形式は（7.3.110）で表示することがあり，内積と呼ばれることもある．

$\langle\mathbf{v}_{\mathrm{f1s}},\mathbf{a}_{\mathrm{f1s}}\rangle=0\cdots(7.3.110)$ 変換

運動量（7.3.81）の両辺を時点 t で微分することで（7.3.111）を記述できる．（7.3.111）の左辺は質点の速さの区間 $0\le v<c$ での運動方程式（7.3.97）に等しい．

$$m(v)\cdot\mathbf{v}(t)=m_0\cdot\mathbf{v}_s(t_1),(0\le v<c)\cdots(7.3.81)$$

$$\frac{\mathrm{d}(m(v)\cdot\mathbf{v}(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m_0\cdot\mathbf{v}_s(t_1))}{\mathrm{d}t},(0\le v<c)\cdots(7.3.111)$$

$\mathbf{f}=\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{S}}(t)}{\mathrm{d}t},(0\le v\le c)\cdots(7.3.97)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する運動方程式

運動方程式（7.3.111）の右辺は合成関数の微分法を使用することで（7.3.112）の右辺のように記述できる．運動方程式（7.3.111）の右辺に（7.3.112）の右辺を代入すると（7.3.113）になる．

$$\frac{\mathrm{d}(m_0\cdot\mathbf{v}_s(t_1))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(m_0\cdot\mathbf{v}_s(t_1))}{\mathrm{d}t_1},(0\le v<c)\cdots(7.3.112)$$

$$\frac{\mathrm{d}(m(v)\cdot\mathbf{v}(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}(m_0\cdot\mathbf{v}_s(t_1))}{\mathrm{d}t_1},(0\le v<c)\cdots(7.3.113)$$

微分係数（7.3.103）を使用すると（7.3.113）は（7.3.114）に書き直すことができる．（7.3.114）の右辺の運動量の x 軸成分は（7.3.79）の右辺であるので，（7.3.114）の右辺の x 軸成分は（7.3.115）に記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}},(0\le v<c)\cdots(7.3.103)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}(m(v)\cdot\mathbf{v}(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m_0\cdot\mathbf{v}_s(t_1))}{\mathrm{d}t_1},(0\le v<c)\cdots(7.3.114)$$

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},(0\le v<c)\cdots(7.3.79)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\cdots(7.3.115)$$

（7.3.115）を使用して，（7.3.114）の右辺は慣性座標系 S でのベクトルの表示では（7.3.116）のように記述できる．（7.3.116）の右辺の各成分は運動量ベクトル（7.3.100）を時点t_1で微分した（7.3.117）の x 軸，y 軸および z 軸での成分に等しい．（7.3.117）は運動量を時点で微分をしていることでは運動方程式と同様の計算である．（7.3.117）の各成分の質量は静止質量であるので定数として扱うことになる．（7.3.117）の各成分には加速度ベクトル（7.3.99）の各成分が記述されている．このようなことから，（7.3.117）の x 軸，y 軸および z 軸での成分は加速度に定数である質量を掛けているのでニュートンの運動方程式に類似の表現であるものと考えることができる．

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v}_s(t_1))}{\mathrm{d}t_1}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\cdot\mathbf{i}+m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\cdot\mathbf{j}+m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\cdot\mathbf{k},(0\le v<c)\cdots(7.3.116)$$

$$\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdots(7.3.100)\text{運動量ベクトル}$$

$$\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\right),(0\le v<c)\cdots(7.3.117)$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{f1s}}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\right)\cdots(7.3.99)\text{加速度ベクトル}$$

運動量（7.3.79）を使用すると，（7.3.117）の x 軸，y 軸および z 軸での成分はそれぞれ（7.3.118）～（7.3.120）のように計算できる．（7.3.118）～（7.3.120）は（7.3.121）～（7.3.123）に整理できる．

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(v)\cdot v_x(t))=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_x\cdots(7.3.118)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(v)\cdot v_y(t))=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_y\cdots(7.3.119)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=m_0\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(v)\cdot v_z(t))=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_z\cdots(7.3.120)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_x,(0\le v<c)\cdots(7.3.121)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_y,(0\le v<c)\cdots(7.3.122)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_z,(0\le v<c)\cdots(7.3.123)$$

（7.3.121）の右辺には相対論的質量を使用した運動方程式の x 軸成分の合力F_x（2.17）が表示されている．（7.3.122）

の右辺には相対論的質量を使用した運動方程式の y 軸成分の合力 F_y （2.18）が表示されている．（7.3.123）の右辺には相対論的質量を使用した運動方程式の z 軸成分の合力 F_z （2.19）が表示されている．

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \cdots (2.17)$$

$$F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \cdots (2.18)$$

$$F_z = \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \cdots (2.19)$$

合力のベクトル (7.3.117) の時点 t の軸成分を使用して導出できる (7.3.124) について考察する. (7.3.124) には (7.3.125) が記述されている．（7.3.125）は単位質量当たりのエネルギーを示している．（7.3.124）には静止質量が（7.3.125）に掛けられていることでエネルギーの単位を示すものと考えることができる．（7.3.124）には（7.3.126）がエネルギーの単位をもつ値に掛けられている．(7.3.126) は時点 t_1 を独立変数とする時点の関数 $t(t_1)$ の第２階の微分係数であるので，その単位は 1/s で扱うことができる．これらのことから，（7.3.124）は単位時間当たりのエネルギーの単位をもつものと扱うことができる．

$$m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2} \cdots (7.3.124)$$

$$c^2 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdots (7.3.125)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2} \cdots (7.3.126)$$

（7.3.127）の右辺には，運動量ベクトル（7.3.100）の時点の軸成分が記述されている．（7.3.127）の左辺には真空中の光の速さ（2.6）が記述されている．

$$m_0 \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m_0 \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right) \cdots (7.3.127)$$

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, m_0 \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right) \cdots (7.3.100) \text{運動量ベクトル}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

微分係数（7.3.103）を使用すると（7.3.128）を記述できる．（7.3.128）の右辺を相対論的質量として解釈できる．相対論的質量として（7.3.128）を使用すると（7.3.127）の右辺は（7.3.129）に記述できる．

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}}}, (0 \leq v < c) \cdots (7.3.103)$$

$$m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}}}, (0 \leq v < c) \cdots (7.3.128)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\left(m_0 \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}(m(v) \cdot c) = \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(v) \cdot c) \cdots (7.3.129)$$

（7.3.127）および（7.3.129）を使用すると，運動量ベクトル（7.3.100）の時点の軸成分は（7.3.130）で記述できる．質点の速さの区間（2.25）で，（7.3.130）の右辺には４次元時空の時点の軸（7.3.2）の成分である運動量（7.3.3）が記述されている．

$$m_0 \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2} = \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(v) \cdot c) \cdots (7.3.130)$$

$$0 \le v < c \cdots (2.25)$$

$$c \cdot t \cdots (7.3.2)$$

$$m(v) \cdot c, (0 \le v \le c) \cdots (7.3.3)$$

（7.3.130）の両辺に真空中の光の速さを掛けることで（7.3.131）になる．（7.3.131）の左辺は（7.3.124）である．

$$m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2} = \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v) \cdot c^2\right) \cdots (7.3.131)$$

（7.3.131）の右辺に記述した（7.3.132）について考察する．（7.3.132）では質量が時点の関数であるものと扱うことになる．質量の時間に対する変化率を導出するために静止質量（3.7）を使用する．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v) \cdot c^2\right), (0 \le v < c) \cdots (7.3.132)$$

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v \le c) \cdots (3.7)$$

計算の記述を簡単にするために（7.3.133）を使用する．（7.3.133）を使用して（3.7）の両辺を２乗すると（7.3.134）になる．

$$m = m(v), (0 \le v \le c) \cdots (7.3.133)$$

$$m^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0{}^2 \cdots (7.3.134)$$

（7.3.134）の両辺を時点 t で微分すると（7.3.135）になる．（7.3.135）の左辺の第２項は（7.3.136）になる．

$$\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}t} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + m^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\mathrm{d}t} = 0 \cdots (7.3.135)$$

$$\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}t} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + m^2 \cdot \left(-\frac{2 \cdot v}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \cdots (7.3.136)$$

（7.3.136）の左辺を真空中の光の速さ（2.6）を使用して（7.3.137）で記述する．（7.3.137）の左辺の第２項を（7.3.138）のように書き直す．

$$\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}t} \cdot \left(c^2 - v^2\right) + m^2 \cdot \left(-2 \cdot v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \cdots (7.3.137)$$

$$\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}t} \cdot \left(c^2 - v^2\right) - m^2 \cdot 2 \cdot v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \cdots (7.3.138)$$

（7.3.138）の左辺の第１項に記述されている（7.3.139）の左辺は合成関数の微分法を使用して（7.3.139）の右辺のように記述できる．（7.3.139）の右辺を（7.3.138）の左辺の第１項に代入すると（7.3.140）になる．

$$\frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m^2}{\mathrm{d}m} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot m \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdots (7.3.139)$$

$$2\cdot m\cdot\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\left(c^2-v^2\right)-m^2\cdot 2\cdot v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\cdots(7.3.140)$$

（7.3.140）から（7.3.141）を導出できる．（7.3.141）の左辺の第１項を展開すると（7.3.142）になる．

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\left(c^2-v^2\right)-m\cdot v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\cdots(7.3.141)$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot c^2-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v^2-m\cdot v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\cdots(7.3.142)$$

（7.3.142）の左辺の第２項および第３項を（7.3.142）の右辺に移項すると（7.3.143）になる．（7.3.143）の右辺の第２項を (7.3.144) に書き直す. (7.3.144) の左辺は (7.3.132) に等しいもの解釈すると (7.3.145) を記述できる. (7.3.144) は質点の速さの区間 $0\le v\le c$ 内で導出できた．（7.3.132）は区間（2.25）内で扱うものである．

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot c^2=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v^2+m\cdot v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.143)$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot c^2=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v^2+\frac{1}{2}m\cdot\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.144)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v)\cdot c^2\right)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot v^2+\frac{1}{2}m\cdot\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t},(0\le v<c)\cdots(7.3.145)$$

$$0\le v<c\cdots(2.25)$$

（7.3.144）の右辺について考察する．（7.3.146）の右辺を計算する．（7.3.146）の右辺は（7.3.147）のように微分できる．

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}(m\cdot\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}\cdots(7.3.146)$$

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}(m)}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+m\cdot\frac{\mathrm{d}(\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}\cdots(7.3.147)$$

（7.3.147）の右辺は（7.3.148）の右辺に記述できる．（7.3.148）の右辺の第２項から第４項は（7.3.149）の右辺の第２項から第４項のように書き直すことができる．

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}(m)}{\mathrm{d}t}\cdot v^2+m\cdot\frac{\mathrm{d}(v_x)}{\mathrm{d}t}\cdot v_x+m\cdot\frac{\mathrm{d}(\cdot v_y)}{\mathrm{d}t}\cdot v_y+m\cdot\frac{\mathrm{d}(v_z)}{\mathrm{d}t}\cdot v_z\cdots(7.3.148)$$

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}(m)}{\mathrm{d}t}\cdot v^2+\frac{1}{2}m\cdot\frac{\mathrm{d}\left(v_x{}^2\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}m\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\cdot v_y{}^2\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}m\cdot\frac{\mathrm{d}\left(v_z{}^2\right)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.149)$$

（7.2.108）を使用すると（7.3.149）の右辺の第２項から第４項は（7.3.150）の右辺の第２項のように記述できる．（7.3.150）の右辺は（7.3.144）の右辺に等しい．（7.3.144）の左辺を（7.3.150）の右辺に代入すると（7.3.151）になる．

$$(v(t))^2=(v_x(t))^2+(v_y(t))^2+(v_z(t))^2\cdots(7.2.108)$$

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}(m)}{\mathrm{d}t}\cdot v^2+\frac{1}{2}m\cdot\frac{\mathrm{d}\left(v^2\right)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.150)$$

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}\left(m\cdot c^2\right)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.151)$$

一般に（7.3.151）の左辺は（7.3.152）の右辺に書き直すことができる．（7.3.151）の右辺は（7.3.152）の右辺に等し

いことから（7.3.153）を導出できる．（7.3.153）は質点の全エネルギーであるものと解釈される．

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.152)$$

$$E=m\cdot c^2\cdots(7.3.153)$$

（7.3.153）を使用すると（7.3.131）の右辺は（7.3.154）になる．合力のベクトルとして扱える（7.3.117）の各成分は（7.3.121），（7.3.122），（7.3.123）および（7.3.130）を使用すると（7.3.155）で記述できる．

$$m_0\cdot c^2\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v)\cdot c^2\right)\cdots(7.3.131)$$

$$m_0\cdot c^2\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.154)$$

$$\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\right),(0\le v<c)\cdots(7.3.117)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_x,(0\le v<c)\cdots(7.3.121)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_y,(0\le v<c)\cdots(7.3.122)$$

$$m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_z,(0\le v<c)\cdots(7.3.123)$$

$$m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v)\cdot c\right)\cdots(7.3.130)$$

$$\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_x,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_y,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_z,\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v)\cdot c\right)\right),(0\le v<c)\cdots(7.3.155)$$

（7.3.152）の左辺のように合力のベクトル（7.3.155）および速度ベクトル（7.3.98）を使用して（7.3.156）を記述する．（7.3.56）を仮定して，（7.3.156）は（7.3.155）および（7.3.98）の x 軸，y 軸および z 軸の各成分で記述したものである．（7.3.56）では微分係数（7.2.148）に（5.50）を仮定している．

$$\mathbf{v}_{\mathrm{f1s}}=\left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1},c\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdots(7.3.98)\text{速度ベクトル}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{v}_s=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_s),(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.156)$$

$$t_1\approx t\cdots(7.3.56)$$

$$\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}=\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.2.148)$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\fallingdotseq 1\cdots(5.50)\text{仮定}$$

（7.3.156）の右辺の括弧内の内積に（7.3.76）の右辺を代入すると内積（7.3.157）を記述できる．（7.3.157）の右辺を整理すると（7.3.158）の右辺のように記述できる．

$$\mathbf{v}_s(t_1)=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\mathbf{v}(t)\cdots(7.3.76)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_s=\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\mathbf{v}(t),\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.157)$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_s=\mathbf{F}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\mathbf{v}(t)=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}(t)\right),\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.158)$$

一般に（7.3.152）のように（7.3.159）を記述できる．（7.3.159）を使用すると，（7.3.158）の右辺は（7.3.160）に記述できる．（7.3.160）の右辺は合成関数の微分法を使用すると（7.3.161）を記述できる．

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}(t)=\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.3.159)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}(t)\right)=\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.160)$$

$$\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdots(7.3.161)$$

（7.3.158）の右辺に（7.3.161）の右辺を代入すると（7.3.162）になる．（7.3.162）を使用すると（7.3.156）は（7.3.163）に記述できる．（7.3.163）は成分で表示すると（7.3.164）になる．

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_s=\frac{\mathrm{d}E(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.162)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\mathbf{v}_s=\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\right)\cdot\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_s\right)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}E(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.163)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_x+\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_y+\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_z=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}E(t_1)}{\mathrm{d}t_1},\left(0\le v\le v_c\right)\cdots(7.3.164)$$

双１次形式で速度ベクトル（7.3.98）および加速度ベクトル（7.3.99）の関係を（7.3.110）で記述した．（7.3.110）の両辺に静止質量を掛けることで(7.3.165)になる．(7.3.165)の左辺の第１項には質点の全エネルギーの変化率(7.3.154)が記述されている．

$$\mathbf{a}_{\mathrm{f1s}}=\left(\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)\cdots(7.3.99)\text{加速度ベクトル}$$

$$c^2\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}-\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}-\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}-\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}=0\cdots(7.3.110)$$

$$c\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)-\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)-\frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)-\frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\cdot\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)=0\cdots(7.3.165)$$

加速度ベクトル(7.3.99)の両辺に静止質量を掛けると(7.3.166)になる．(7.3.166)の右辺は合力のベクトル(7.3.155)である．合力のベクトル（7.3.166）を使用して，４次元時空での内積に相当する双１次形式の記述をすると（7.3.165）は（7.3.167）になる．（7.3.165）は（7.3.168）に書き直すことができる．（7.3.168）の右辺には（7.3.131）の右辺を代入して，合力のベクトル（7.3.155）の右辺のｘ軸，ｙ軸およびｚ軸成分を（7.3.168）の左辺に代入すると（7.3.169）になる．（7.3.169）は整理すると（7.3.170）になる．

$$\mathbf{f}_{\mathrm{f1s}}=m_0\cdot\mathbf{a}_{\mathrm{f1s}}=\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right),\left(0\le v<c\right)\cdots(7.3.166)$$

$$\left(m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2x(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2y(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},m_0\cdot\frac{\mathrm{d}^2z(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2},m_0\cdot c\cdot\frac{\mathrm{d}^2t(t_1)}{\mathrm{d}t_1{}^2}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_x,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_y,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1}\cdot F_z,\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v)\cdot c\right)\right),\left(0\le v<c\right)\cdots(7.3.155)$$

$$\left\langle \mathbf{v}_{\mathrm{f1s}}, m_0 \cdot \mathbf{a}_{\mathrm{f1s}} \right\rangle = 0 \cdots (7.3.167)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} \right) + \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} \right) + \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} \right) = \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \left(m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} \right) \cdots (7.3.168)$$

$$m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} = \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v) \cdot c^2 \right) \cdots (7.3.131)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_x + \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_y + \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_z = \left(\frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(v) \cdot c^2 \right), (0 \le v < c) \cdots (7.3.169)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_x + \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_y + \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_z = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}E(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, (0 \le v < c) \cdots (7.3.170)$$

質点の全エネルギーの変化率（7.3.131）と４次元時空のベクトルとの関係について考察する．運動量ベクトル（7.3.100）の各成分に定数である真空中の光の速さを掛けると（7.3.171）になる．

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, m_0 \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right) \cdots (7.3.100) \text{ 運動量ベクトル}$$

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right) \cdots (7.3.171)$$

質量の変換の式（7.3.10）を書き換えて（7.3.172）を記述できる．（7.3.172）を使用すると，（7.3.171）の（7.3.2）の軸成分は（7.3.173）のように書き換えることができる．

$$m_0 = m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}, (0 \le v \le c) \cdots (7.3.10)$$

$$m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} = m(v), (0 \le v < c) \cdots (7.3.172)$$

$$c \cdot t \cdots (7.3.2)$$

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m(v) \cdot c^2 \right), (0 \le v < c) \cdots (7.3.173)$$

慣性座標系 S での質点の運動量は（7.3.79）のような関係を保存しているものと仮定しているので（7.3.173）の x 軸，y 軸および z 軸の各成分は（7.3.174）の x 軸，y 軸および z 軸の各成分で記述できる．（7.3.174）の各成分は慣性座標系 S の時点 t で記述できる関数として扱うことができる．

$$m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, (0 \le v < c) \cdots (7.3.79)$$

$$\left(m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \cdot c, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \cdot c, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \cdot c, m(v) \cdot c^2 \right), (0 \le v < c) \cdots (7.3.174)$$

相対論的質量 (2.23) を使用した運動量 (2.20) ～ (2.22) を使用すると，(7.3.174) は (7.3.175) で記述できる．(7.3.175) の各成分の単位はエネルギーの単位である J で記述できる．質量（7.3.172）および相対論的質量（2.23）を使用した運動量（2.20）～（2.22）を使用すると，運動量ベクトル（7.3.100）は（7.3.176）で記述できる．

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$$p_x = m \cdot v_x \cdots (2.20)$$

$p_y = m \cdot v_y \cdots (2.21)$

$p_z = m \cdot v_z \cdots (2.22)$

$\left(p_x(t) \cdot c, p_y(t) \cdot c, p_z(t) \cdot c, m(v) \cdot c^2\right), (0 \le v < c) \cdots (7.3.175)$

$\left(p_x(t), p_y(t), p_z(t), m(v) \cdot c\right), (0 \le v < c) \cdots (7.3.176)$ 運動量ベクトル

運動量（7.3.79）の右辺では，合力のベクトル（7.3.155）で質点の全エネルギーの変化率（7.3.170）の関係を導出できた．著者の経験では，一般には（7.3.155）のような合力の記述はしないで，慣性座標系 S の時点 t を使用した（2.17）～（2.19）のような運動方程式を使用する．

$$m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, (0 \le v < c) \cdots (7.3.79)$$

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \cdots (2.17)$$

$$F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \cdots (2.18)$$

$$F_z = \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} \cdots (2.19)$$

（7.3.79）の右辺には静止質量が記述されている．本書では静止質量を（3.7）で定義した．７章４節では静止質量の式（3.7）を導出する．

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v \le c) \cdots (3.7)$$

7.4 特殊相対性理論での４次元のリーマン空間で考察する質点の運動量およびエネルギーを記述した座標

アインシュタインの特殊相対性理論では慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 のそれぞれに４次元時空を考えることができる．それぞれの４次元時空でのベクトルを（7.2.10）および（7.2.11）で記述した．７章３節の後半では慣性座標系 S_1 の時点 t_1 で速度ベクトル（7.3.98）を記述したものを使用して質点に作用する合力およびその質点の全エネルギーの変化率との関係（7.3.170）を考察した．

$(x, y, z, c \cdot t) \cdots (7.2.10)$

$(x_1, y_1, z_1, c \cdot t_1) \cdots (7.2.11)$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{f1s}} = \left(\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, c \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\right) \cdots (7.3.98)$$ 速度ベクトル

$$\frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_x + \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_y + \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot F_z = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}E(t_1)}{\mathrm{d}t_1}, (0 \le v < c) \cdots (7.3.170)$$

７章４節ではベクトル（7.2.10）から慣性座標系 S の時点 t で微分した速度ベクトル（7.3.101）を使用して静止質量の導出について考察する．その導出では，ベクトル（7.2.11）から慣性座標系 S の時点 t で微分した速度ベクトル（7.3.102）を使用して４次元時空の運動量の不変性について計算する．

$$\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, c\right) \cdots (7.3.101)$$

$$\left(0, 0, 0, c \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right) \cdots (7.3.102)$$

本書では質量（3.8）を仮定して論じている．慣性座標系 S 内に質量（3.8）の質点を仮定する．その質点の運動量

を４次元時空のベクトルでは（7.4.1）で記述できる．運動量ベクトル（7.4.1）には（7.3.2）の時点の軸成分に運動量（7.3.3）が記述されている．運動量ベクトル（7.4.1）は質量（3.8）と速度（7.3.101）を掛けたものである．このような運動量の計算はニュートン力学と類似である．(7.4.1）では質量は速さの関数（3.8）であり（7.3.2）の軸成分では運動量（7.3.3）を導入することでニュートン力学と異なる箇所を指摘できる．

$m(v),(0 \le v \le c)\cdots(3.8)$ アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量

$$\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot c\right)\cdots(7.4.1)$$ 運動量ベクトル

$$c\cdot t\cdots(7.3.2)$$

$$m(v)\cdot c,(0 \le v \le c)\cdots(7.3.3)$$

質量 (3.8) は真空中の光の速さで使用できる. 著者の経験での一般的な特殊相対性理論では相対論的質量 (2.23) を定義区間（2.25）で導入する．相対論的質量（2.23）は本書で仮定した質量（3.8）とは異なる慣性質量である．慣性質量（3.8）は質点の速さは（7.1.64）の場合も含めて仮定されたものである．真空中の光の速さ（2.6）の場合では相対論的質量（2.23）は使用できない．このことは，慣性質量である（2.23）と（3.8）との異なる箇所として重要な部分である．(7.1.64）で相対論的質量（2.23）の分母を計算すると分母が零になってしまう．このことを回避することで真空中の光の速さ（2.6）で移動する質点の慣性質量を計算する必要がある．

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdots(2.23)$$

$$0 \le v < c\cdots(2.25)$$

$$v=c\cdots(7.1.64)$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\times\varepsilon_0}},(c\ne 0,c>0)\cdots(2.6)$$

相対論的質量（2.23）を書き換えると静止質量（7.4.2）を記述できる．静止質量（7.4.2）では質点が真空中の光の速さで移動する（7.1.64）の場合は使用できない．７章３節では（7.3.91）のような極限値は計算できた．(7.4.2）では極限値（7.3.91）と同様の結果になる．

$$m_0=m\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0 \le v < c)\cdots(7.4.2)$$

$$\lim_{v\to c}m_0=\lim_{v\to c}\left(m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=0,(0 \le v < c)\cdots(7.3.91)$$

真空中の光の速さ（2.6）は，４次元時空の運動量ベクトルを記述する（7.3.2）軸上の速度の成分として使用する．真空中の光の速さの符号は正であるので，一般的な時間の進み方では時点軸上では質点は時点が増加する方向に向かって移動する．時点が増加する方向は未来に向かって移動するものと解釈できる．時間を計算する際に図 7.1.1 の時計で真空中の光の速さを使用した．図 7.1.1 の時計では真空中の光が移動する距離を使用して時間を計算する．４次元時空の速度ベクトル（7.3.101）では，時点の（7.3.2）軸上で質点は真空中の光の速さで移動するので真空中の光の移動距離を計算できる．その質点の移動距離を使用して，図 7.1.1 の計算式（7.1.32）で時間を計算できる．擬リーマン計量が不変（7.2.47）になるように（7.1.32）で計算できる時間の時点の（7.3.2）軸を４次元時空に導入した．その時点の（7.3.2）軸を，ｘ軸，ｙ軸およびｚ軸のような位置および距離を意味する軸として解釈できる．

$$c \cdot t \cdots (7.3.2)$$

$$\Delta t_c = \frac{\Delta r_c}{c} \mathrm{s} \cdots (7.1.32)$$

$$c^2 \cdot (\Delta t)^2 - \{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\} = c^2 \cdot (\Delta t_1)^2 \cdots (7.2.47)$$

真空中の光の速さの２乗では（7.3.125）の単位を計算できた．質点の速さの区間が（2.25）で（7.3.171）は導出できた．（7.3.171）は相対論的質量（2.23）を使用して導出できるものである．このことから，著者が見てきた一般的な特殊相対性理論からでも導出できることになる．（7.3.171）の（7.3.2）の軸成分では（7.3.124）が記述されている．（7.3.124）は単位（7.4.3）をもつものと扱える．（7.3.124）は（7.3.154）に記述できた．（7.3.2）の軸の成分で（7.3.154）のようにエネルギーの変化率が記述できることは，真空中の光の速さ（2.6）で距離を計算する軸（7.3.2）の成分に単位質量当たりのエネルギーの単位（7.3.125）を記述できることで説明できる．

$$c^2 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \cdots (7.3.125)$$

$$0 \le v < c \cdots (2.25)$$

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \cdot c, m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \right) \cdots (7.3.171)$$

$$m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} \cdots (7.3.124)$$

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdots (7.4.3)$$

$$m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t(t_1)}{\mathrm{d}{t_1}^2} = \frac{\mathrm{d}t(t_1)}{\mathrm{d}t_1} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \cdots (7.3.154)$$

静止質量（7.4.2）および（7.3.125）を使用すると，エネルギーの変換として解釈できる式（7.4.4）を記述できる．区間（2.25）でも質点の全エネルギー（7.3.153）は導出できる．（7.2.108）で説明できる速さは，時点 t を独立変数とする関数として扱える．このことで，（7.4.4）の右辺は時点 t を独立変数とするエネルギー（7.3.153）と速さの２乗の関数（7.2.108）で記述しているものと考えることができる．このことは，（7.4.4）の右辺は時点 t を独立変数とする関数として扱うことができる．

$$m_0 \cdot c^2 = m(v) \cdot c^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v < c) \cdots (7.4.4)$$

$$E = m \cdot c^2 \cdots (7.3.153)$$

$$(v(t))^2 = (v_x(t))^2 + (v_y(t))^2 + (v_z(t))^2 \cdots (7.2.108)$$

（7.3.153）を導出するのに（7.3.144）および（7.3.152）を使用した．本書での（7.3.144）の導出方法は質点が真空中の光の速さで移動する場合（7.1.64）でも使用できる．その導出方法では静止質量の定義（3.7）を使用した．

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot c^2 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v^2 + \frac{1}{2} m \cdot \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} \cdots (7.3.144)$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \cdots (7.3.152)$$

$$m_0 \equiv m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v \le c) \cdots (3.7)$$

$v=c\cdots(7.1.64)$

（7.3.154）は区間（2.25）での計算である．質点が真空中の光の速さで移動する場合（7.1.64）でも同様に質点の慣性質量を計算できる場合を考える．著者が試みで構築した本書の理論では質量（3.8）を仮定して相対論的質量（2.25）を使用しなくても運動量（7.4.1）および静止質量（3.7）を記述できるものと著者は考えた．静止質量（3.7）は相対論的質量から書き換えなくても（7.1.64）の場合を含めて導出できることを７章４節で明らかにする．

（7.4.4）の左辺は静止している質点のもつ静止エネルギー（3.3）であるものと解釈できる．静止エネルギー（3.3）は慣性座標系 S 内に静止している質点のエネルギーである．４次元時空では x 軸，y 軸および z 軸の質点の速さは零でも時点の（7.3.2）軸成分は時点が進んでいることから真空中の光の速さ（2.6）で移動することになる．４次元時空の速度ベクトル (7.3.101) を使用すると慣性座標系内で静止している質点の速度ベクトルは (7.4.5) になる. 静止質量 (7.4.2) および速度ベクトル (7.4.5) を使用すると運動量ベクトル (7.4.6) を記述できる. 運動量ベクトル (7.4.6) の時点の (7.3.2) 軸成分は区間（2.25）内での運動量（7.3.3）を記述している．一方，運動量ベクトル（7.4.1）では質点が移動しているときの質量を使用した記述になる．運動量ベクトル（7.4.1）および運動量ベクトル（7.4.6）の関係を与えることで静止質量（7.4.2）と相対論的質量（2.5）との関係を記述できることが考えられる．

$E(0)=m_0\times c^2\cdots(3.3)$ 静止エネルギー

$$\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},c\right)\cdots(7.3.101)$$

$(0,0,0,c)\cdots(7.4.5)$

$(0,0,0,m_0\cdot c)\cdots(7.4.6)$

$$\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot c\right)\cdots(7.4.1)$$ 運動量ベクトル

７章４節では，そのような関係を与えることで静止質量を導出する．静止質量を導出した後には，質点の全エネルギーと質点の運動量との関係を導出する．

本書では質点が速度ベクトル (7.3.101) で時空を移動している場合は, その質点の質量 (3.8) を仮定する. 仮定 (5.50) が成立するならば（7.3.56）が成立することを７章３節で説明した．（7.3.56）はニュートン力学で使用するガリレイ変換の時点の式に近似していた．仮定（5.50）では（7.3.7）が成立した．（7.3.7）から運動量を近似した（7.3.15）が記述できた．ニュートン力学で使用した運動量（7.3.92）を近似する（7.3.17）を仮定（5.50）では仮定できた．ニュートン力学の質量がひとつに定まらないことから近似している（7.3.17）は成立しない余地が生じた．ここでは，仮定（5.50）で運動量（7.3.60）が成立する場合で考察をする．（7.3.60）の考察ではニュートン力学の運動量を使用して４次元時空の運動量ベクトルを記述する．

$m(v),(0\le v\le c)\cdots(3.8)$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\fallingdotseq 1\cdots(5.50)$$ 仮定

$t_1\approx t\cdots(7.3.56)$

$m_0\approx m(v)\cdots(7.3.7)$ 特殊相対性理論での質量の近似式

$m_0\cdot\mathbf{v}(t)\approx m(v)\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.15)$

$\mathbf{p}_{\mathrm{N}}(t)=m_{\mathrm{N0}}\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v)\cdots(7.3.92)$

$m_{\mathrm{N0}}\cdot\mathbf{v}(t)\approx m_0\cdot\mathbf{v}(t),(0\le v\le v_c)\cdots(7.3.17)$

$$m_{\mathrm{N0}} \cdot \mathbf{v}(t) = m_0 \cdot \mathbf{v}(t), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.3.60)$$

（7.3.60）を使用して，静止質量m_0で質点が４次元時空を移動していることを仮定する．このことで次のような運動量（7.4.7）を考えることができる．

$$\left(m_{\mathrm{N0}} \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m_{\mathrm{N0}} \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m_{\mathrm{N0}} \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m_{\mathrm{N0}} \cdot c\right) = \left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot c\right), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.4.7)$$

静止質量（7.4.2）を（7.4.7）の右辺に代入すると（7.4.8）を記述できる．運動量ベクトル（7.4.8）の右辺は（7.4.9）の右辺のように書き直すことができる．

$$m_0 = m \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, (0 \le v < c) \cdots (7.4.2)$$

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot c\right)$$
$$= \left(m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot c\right), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.4.8)$$

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot c\right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot c\right), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.4.9)$$

（7.4.9）は相対論的質量（2.23）を使用して記述している．質点が真空中の光の速さで移動する場合（7.1.64）でも使用できる運動量ベクトルの記述を導入する．（7.4.9）の右辺の座標成分表示である運動量ベクトルを改めて４次元時空の運動量ベクトル（7.4.10）として与える．（7.4.10）の質量は（3.8）で仮定したものであるので静止質量（3.7）および相対論的質量（2.23）を使用しなくても本書の特殊相対性理論では（7.4.10）を記述できる．（7.4.10）の右辺は（7.4.1）に等しい．

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$$v = c \cdots (7.1.64)$$

$$\left(p_x, p_y, p_z, p_t\right) = \left(m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot c\right), (0 \le v \le c) \cdots (7.4.10)$$

$m(v), (0 \le v \le c) \cdots (3.8)$アインシュタインの特殊相対性理論で使用する質量

仮定（5.50）が成立していることで，運動量ベクトル（7.4.9）は運動量ベクトルの近似の関係（7.4.11）に記述できる．運動量ベクトル（7.3.15）を使用すると（7.4.11）を記述できる．運動量ベクトル（7.4.11）の左辺はニュートン力学の運動量である．仮定（7.3.17）ではニュートン力学の運動量で近似の関係（7.4.12）が成立する．

$$\left(m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m_0 \cdot c\right) \approx \left(m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot c\right), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.4.11)$$

$$\left(m_{\mathrm{N0}} \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m_{\mathrm{N0}} \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m_{\mathrm{N0}} \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m_{\mathrm{N0}} \cdot c\right) \approx \left(m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, m(v) \cdot c\right), (0 \le v \le v_c) \cdots (7.4.12)$$

質点の速さの区間を運動量ベクトル（7.4.10）で記述できる場合で静止質量（3.7）の導出をする．リーマン計量が定義された４次元時空での運動量ベクトル（7.4.10）の大きさの２乗は（7.4.13）で記述できる．（7.4.13）は整理すると（7.4.14）で記述できる．

$$s^2=(m(v)\cdot c)^2-\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2-\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2-\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2,(0\le v\le c)\cdots(7.4.13)$$

$$s^2=(m(v))^2\cdot c^2-(m(v))^2\cdot\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\},(0\le v\le c)\cdots(7.4.14)$$

（7.4.14）の右辺に（7.4.15）の左辺を代入すると（7.4.16）になる．質量（3.8）について（7.4.16）を整理すると（7.4.17）を記述できる．（7.4.17）を真空中の光の速さの２乗について整理すると（7.4.18）になる．

$$v^2=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.4.15)$$
$$s^2=(m(v))^2\cdot c^2-(m(v))^2\cdot v^2,(0\le v\le c)\cdots(7.4.16)$$
$$s^2=(m(v))^2\cdot(c^2-v^2),(0\le v\le c)\cdots(7.4.17)$$
$$s^2=(m(v))^2\cdot c^2\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right),(0\le v\le c)\cdots(7.4.18)$$

運動量ベクトル（7.4.10）の質点が静止している慣性座標系 S_1 が存在する場合を仮定する．運動量ベクトル（7.4.6）の大きさの２乗は（7.4.19）になる．（7.4.19）を整理すると（7.4.20）になる．

$$(0,0,0,m_0\cdot c)\cdots(7.4.6)$$
$$s^2=(m_0)^2\cdot c^2-(m_0)^2\cdot\{0^2-0^2-0^2\}\cdots(7.4.19)$$
$$s^2=(m_0)^2\cdot c^2\cdots(7.4.20)$$

７章２節で（7.2.109）を擬リーマン計量の不変性（7.2.47）から導出した．（7.2.109）の右辺は，慣性座標系 S_1 内で静止している質点の速度ベクトル（7.3.102）の大きさの２乗である．（7.2.109）の右辺に記述した真空中の光の速さは，慣性座標系 S_1 内で静止している質点の速度ベクトル（7.4.5）の（7.3.2）軸成分として扱える真空中の光の速さである．（7.2.109）は（7.4.21）に書き直すことができる．

$$c^2-(v(t))^2=c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.2.109)$$

$$\left(0,0,0,c\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(7.3.102)$$

$$c^2\cdot(\Delta t)^2-\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\}=c^2\cdot(\Delta t_1)^2\cdots(7.2.47)$$
$$c\cdot t\cdots(7.3.2)$$
$$(0,0,0,c)\cdots(7.4.5)$$
$$c^2\cdot\left\{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}\right\}=c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.4.21)$$

（7.4.17）の右辺に（7.2.109）を代入すると（7.4.22）になる．（7.4.22）の左辺は，慣性座標系内を移動している質点の擬リーマン計量である．(7.4.22)の右辺では，慣性座標系 S_1 で静止している質点に質量(3.8)および微分係数(7.2.148)の２乗を掛けたものである．慣性座標系 S_1 内での質点の運動量ベクトルの大きさの２乗は（7.4.20）の右辺であった．（7.4.22）が運動量ベクトルの大きさの２乗であることで，（7.4.22）の右辺は慣性座標系 S_1 内で静止している質点の運動量ベクトルの大きさの２乗であるものと考えることができる．（7.4.22）の左辺には速さ（7.4.15）で移動している場合の運動量ベクトルのすべてを同様の表現で記述できることを意味する．静止している質点の場合は（7.4.15）の右辺は零であるので，（7.4.23）になることは明らかである．（7.4.23）は（7.4.24）に書き直すことができる．（7.4.22）は運

動量ベクトル（7.4.6）および運動量ベクトル（7.4.10）が４次元時空での擬リーマン計量で不変量になることを示している．

$$(m(v))^2\cdot\left\{c^2-(v(t))^2\right\}=(m(v))^2\cdot c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.4.22)$$

$$\sqrt{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}}=\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.2.148)$$

$$(m(0))^2\cdot c^2=(m(v))^2\cdot c^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.4.23)$$

$$(m_0)^2=(m(v))^2\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.4.24)$$

（7.4.24）の右辺に（7.2.10）の左辺を代入すると（7.4.25）になる． 静止質量は（7.4.26）の不等式を満足するものと扱うことができる．（7.4.26）であることを仮定すると，（7.4.25）から（7.4.27）を得る．

$$1-\frac{(v(t))^2}{c^2}=\left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\cdots(7.2.110)$$

$$(m_0)^2=(m(v))^2\cdot\left\{1-\frac{(v(t))^2}{c^2}\right\}\cdots(7.4.25)$$

$$m_0\geq 0\cdots(7.4.26)$$

$$m_0=m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\leq v\leq c)\cdots(7.4.27)$$

（7.2.148）を（7.4.27）の右辺に代入すると（7.4.28）になる．（7.4.27）は（3.7）に等しい．（7.4.28）は（7.3.10）に等しい．（7.4.27）を導出できたことで静止質量（3.7）を導出できた．

$$m_0=m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t},(0\leq v\leq c)\cdots(7.4.28)$$

$$m_0\equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\leq v\leq c)\cdots(3.7)$$

$$m_0=m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t},(0\leq v\leq c)\cdots(7.3.10)$$

(3.7) を導出できたことで，質点の速さが真空中の光の速さの場合 (7.1.64) でも質点の全エネルギー (7.3.153) を記述できる．運動量ベクトル（7.4.10）も質点の速さが真空中の光の速さの場合（7.1.64）で記述できる．運動量ベクトル (7.4.10) の両辺に真空中の光の速さを掛けることで，(7.4.29) を記述できる．(7.4.10) の左辺の (7.3.2) の軸成分は（7.4.30）で記述する．

$$v=c\cdots(7.1.64)$$

$$E=m\cdot c^2\cdots(7.3.153)$$

$$(p_x,p_y,p_z,p_t)=\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},m(v)\cdot c\right),(0\leq v\leq c)\cdots(7.4.10)$$

$$(p_x\cdot c,p_y\cdot c,p_z\cdot c,p_t\cdot c)=\left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot c,m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\cdot c,m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\cdot c,m(v)\cdot c^2\right)\cdots(7.4.29)$$

$$c\cdot t\cdots(7.3.2)$$

$p_t = m(v)\cdot c \cdots (7.4.30)$

（7.4.29）の（7.3.2）の軸成分には質点の全エネルギー（7.3.153）を記述している．質点が慣性座標系内で静止している場合では（7.4.29）は（7.4.31）になる．

$(p_x \cdot c, p_y \cdot c, p_z \cdot c, p_t \cdot c) = (0,0,0, m_0 \cdot c^2) \cdots (7.4.31)$

慣性座標系内の運動量ベクトルの大きさの２乗を（7.4.32）で記述する．ベクトル（7.4.29）の大きさの２乗は（7.4.33）になる．質点が慣性座標系内で静止している場合では（7.4.33）は（7.4.34）に記述できる．

$(p(t))^2 = (p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 \cdots (7.4.32)$

${s_{pc}}^2 = (p_t \cdot c)^2 - \{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2\} \cdot c^2 \cdots (7.4.33)$

${s_{pc}}^2 = (m(0) \cdot c \cdot c)^2 \cdots (7.4.34)$

運動量の大きさの２乗（7.4.22）を（7.4.35）に書き直す．（7.4.35）の両辺に真空中の光の速さの２乗を掛けることで（7.4.36）を記述できる．（7.4.23）を使用すると（7.4.36）の右辺は（7.4.37）の右辺のように書き直すことはできる．

$$(m(v))^2 \cdot \{c^2 - (v(t))^2\} = (m(v))^2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdots (7.4.22)$$

$$(m(v))^2 \cdot c^2 - (m(v))^2 \cdot (v(t))^2 = (m(v))^2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdots (7.4.35)$$

$$(m(v))^2 \cdot c^4 - (m(v))^2 \cdot (v(t))^2 \cdot c^2 = (m(v))^2 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdots (7.4.36)$$

$(m(v))^2 \cdot c^4 - (m(v))^2 \cdot (v(t))^2 \cdot c^2 = (m(0))^2 \cdot c^4 \cdots (7.4.37)$

質点の全エネルギー（7.3.153）および運動量ベクトルの大きさの２乗（7.4.32）を使用すると（7.4.37）は（7.4.38）に記述できる．（7.4.26）を使用すると（7.4.38）から（7.4.39）を導出できる．

$E^2 - (p(t))^2 \cdot c^2 = (m(0))^2 \cdot c^4 \cdots (7.4.38)$

$\sqrt{E^2 - p^2 \cdot c^2} = m_0 \cdot c^2 \cdots (7.4.39)$

静止質量が（7.4.40）の場合は（7.4.39）から（7.4.41）を導出できる．特殊相対性理論で導出した（7.4.41）は電磁気学から導出される光の運動量の計算結果に等しい表現である．

$m_0 = 0 \cdots (7.4.40)$

$E = p \cdot c \cdots (7.4.41)$

7.5 ４次元時空で導出する一般的な記述でのエネルギーの変換および質量の変換

７章５節では，一般的な記述での質点の全エネルギーの変換および質量の変換を導出する．それらの変換を導出することで７章の説明はすべて終了する．

４次元時空のベクトル（7.4.29）の（7.3.2）の軸成分には質点のエネルギーが記述されている．質点の全エネルギーでは，質量（3.8）が変数として解釈できる箇所である．

$$(p_x \cdot c, p_y \cdot c, p_z \cdot c, p_t \cdot c) = \left(m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\cdot c, m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\cdot c, m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\cdot c, m(v)\cdot c^2\right) \cdots (7.4.29)$$

$c \cdot t \cdots (7.3.2)$

質量（3.8）は質量の変換（7.3.10）で静止質量に変換できる．（7.3.10）の両辺に真空中の光の速さの２乗を掛けることで（7.5.1）を記述できる．（7.5.1）は質点の全エネルギーの変換を意味する．

$$m_0 = m(v) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}, (0 \le v \le c) \cdots (7.3.10)$$

$$m_0 \cdot c^2 = m(v) \cdot c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}, (0 \le v \le c) \cdots (7.5.1)$$

（7.5.1）では慣性座標系 S_1 で質点は静止しているものと考える．真空中の光の場合では理論上は静止しているものとはできないが計算の便宜上，静止質量を計算することにする．慣性座標系 S では質点は（7.5.1）に示してある速さ v の区間内で移動していることを仮定している．慣性座標系 S 内での質点の全エネルギーを（7.5.2）で記述する．（7.5.2）を（7.5.1）の右辺に（7.5.2）の左辺を代入することで（7.5.3）を記述できる．（7.5.3）の右辺に記述している微分係数は（7.2.148）である．

$$E(t) = m(v) \cdot c^2 \cdots (7.5.2)$$

$$m_0 \cdot c^2 = E(t) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}, (0 \le v \le c) \cdots (7.5.3)$$

$$\sqrt{1 - \frac{(v(t))^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.2.148)$$

慣性座標系 S_1 では質点は静止しているものと考える．真空中の光の場合では理論上は静止しているものとはできないが計算の便宜上，静止質量を計算することにする．慣性座標系 S_2 内での質点の全エネルギーを（7.5.4）で記述する．慣性座標系 S_2 では質点は（7.5.5）に示してある速さ v_2 の区間内で移動していることを仮定している．（7.5.5）は質点の全エネルギーの変換を意味する．（7.5.5）の右辺に記述している微分係数は（7.5.6）である．

$$E_2(t_2) = m_2(v_2) \cdot c^2 \cdots (7.5.4)$$

$$m_0 \cdot c^2 = E_2(t_2) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2}, (0 \le v_2 \le c) \cdots (7.5.5)$$

$$\sqrt{1 - \frac{(v_2(t_2))^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2} \cdots (7.5.6)$$

（7.5.3）および（7.5.5）の左辺は慣性座標系 S_1 内の質点の静止エネルギーを記述している．このことで，（7.5.3）の右辺は（7.5.5）の右辺に等しいことから（7.5.7）を記述できる．

$$E(t) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} = E_2(t_2) \cdot \frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2}, (0 \le v \le c) \cdots (7.5.7)$$

（7.5.7）の左辺に記述した微分係数に（7.5.8）の合成関数の微分法が成立する場合を仮定する．（7.5.8）では（7.5.9）が成立するならば（7.5.10）が成立する．（7.5.9）および（7.5.10）では，慣性座標系が真空中の光の速さで移動していることになる．このことは，付録ⅳで導出している．

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2} \cdot \frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (7.5.8)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2} = 0 \cdots (7.5.9)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \cdots (7.5.10)$$

（7.5.7）の左辺に（7.5.8）の右辺を代入すると（7.5.11）になる．（7.5.11）から（7.5.12）を導出できる．（7.5.12）は慣性座標系 S の質点の全エネルギーを慣性座標系 S_2 の質点の全エネルギーに変換する式であるものと解釈できる．

$$E(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2}\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=E_2(t_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v\le c)\cdots(7.5.11)$$

$$E(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=E_2(t_2),(0\le v\le c)\cdots(7.5.12)$$

(7.5.7) の右辺に記述した微分係数に (7.5.13) の合成関数の微分法が成立する場合を仮定する. (7.5.13) では (7.5.10) が成立するならば（7.5.9）が成立する.（7.5.9）および（7.5.10）では，慣性座標系が真空中の光の速さで移動していることになる．このことは，付録ⅳで導出している.

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2}=\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2}\cdots(7.5.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}=0\cdots(7.5.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_1(t_2)}{\mathrm{d}t_2}=0\cdots(7.5.9)$$

（7.5.7）の右辺に（7.5.13）の右辺を代入すると（7.5.14）になる.（7.5.14）から（7.5.15）を導出できる.（7.5.15）は慣性座標系 S_2 の質点の全エネルギーを慣性座標系 S の質点の全エネルギーに変換する式であるものと解釈できる.

$$E(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}=E_2(t_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.14)$$

$$E(t)=E_2(t_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.15)$$

エネルギーの変換である（7.5.12）および（7.5.15）から質量の変換を導出する.（7.5.12）および（7.5.15）の左辺には質点の全エネルギー（7.5.2）を記述している.（7.5.12）および（7.5.15）の右辺には質点の全エネルギー（7.5.15）を記述している.

$$E(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=E_2(t_2),(0\le v\le c)\cdots(7.5.12)$$

$$E(t)=E_2(t_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.15)$$

$$E(t)=m(v)\cdot c^2\cdots(7.5.2)$$
$$E_2(t_2)=m_2(v_2)\cdot c^2\cdots(7.5.4)$$

（7.5.2）をエネルギーの変換（7.5.12）の左辺に代入して，（7.5.4）をエネルギーの変換（7.5.12）の右辺に代入することで（7.5.16）になる.（7.5.16）を整理すると質量の変換（7.5.17）を導出できる.

$$m(v)\cdot c^2=m_2(v_2)\cdot c^2\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.16)$$

$$m(v)=m_2(v_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.17)$$

（7.5.2）をエネルギーの変換（7.5.15）の左辺に代入して，（7.5.4）をエネルギーの変換（7.5.15）の右辺に代入することで（7.5.18）になる.（7.5.18）を整理すると質量の変換（7.5.19）を導出できる.

$$m(v)\cdot c^2\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=m_2(v_2)\cdot c^2,(0\le v\le c)\cdots(7.5.18)$$

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=m_2(v_2),(0\le v\le c)\cdots(7.5.19)$$

本書の４章および付録 ii のエネルギーの変換（4.6），エネルギーの変換（a.2.35），質量の変換（4.18）および質量の変換（a.2.32）はローレンツ変換（2.8）～（2.11）を使用して導出したものである．エネルギーの変換（4.6）に対する逆変換は（a.2.35）である．質量の変換（4.18）に対する逆変換は（a.2.32）である．これらの４つの変換では，慣性座標系は互いに x 軸方向に等速度運動をしており，質点の速度の成分は x 軸の成分のみを記述している．

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},(u\ne c)\cdots(4.6)$$

$$E_1(v_1)=E(v)\cdot\frac{1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(a.2.35)$$

$$m=\frac{m_1\cdot\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.18)$$

$$m_1=m\cdot\frac{1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(a.2.32)$$

$$x_1=\gamma\cdot(x-u\cdot t)\cdots(2.8)$$
$$y_1=y\cdots(2.9)$$
$$z_1=z\cdots(2.10)$$
$$t_1=\gamma\cdot\left(t-\frac{u\cdot x}{c^2}\right)\cdots(2.11)$$

７章５節では，エネルギーの変換 (4.6)，エネルギーの変換 (a.2.35)，質量の変換 (4.18) および質量の変換 (a.2.32) よりも一般的な変換としてエネルギーの変換（7.15），エネルギーの変換（7.5.12），質量の変換（7.5.19）および質量の変換（7.5.17）を導出した．エネルギーの変換（7.5.15）に対する逆変換は（7.5.12）である．質量の変換（7.5.19）に対する逆変換は（7.5.17）である．これらの４つの変換では質点の速度の成分は明記されていない．

$$E(t)=E_2(t_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.15)$$

$$E(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=E_2(t_2),(0\le v\le c)\cdots(7.5.12)$$

$$m(v)\cdot\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}=m_2(v_2),(0\le v\le c)\cdots(7.5.19)$$

$$m(v)=m_2(v_2)\cdot\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2},(0\le v_2\le c)\cdots(7.5.17)$$

質点の速度の成分を記述するには，これらの変換と質点の速度の成分との関係は微分係数（7.5.20）および微分係数（7.5.21）を速度の成分で記述する方法に依る．

$$\frac{\mathrm{d}t(t_2)}{\mathrm{d}t_2}\cdots(7.5.20)$$

$$\frac{\mathrm{d}t_2(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(7.5.21)$$

８　あとがき

２０１０年１１月現在の本書の本文では，真空中の光の速さで移動している質点にも使用できる質量の変換およびエネルギーの変換を導出した．そのような変換を導出する際に，著者が独自に定義した静止質量を使用した．これらの変換は，相対論的質量の場合でも使用できる．

運動方程式 (2.17) ～ (2.19) で記述している合力の変換を導出できる．この合力の変換には運動方程式 (2.29) ～ (2.31) で記述している合力も使用する．本書で導出した相対論的質量の変換を使用して，アインシュタインの特殊相対性理論で，その力の変換を導出することができる．本書の後に発行する力の変換の導出を説明する PDF 文書で，相対論的質量の変換を使用する予定である．

本書の内容は，アインシュタインの特殊相対性理論として扱われる２００８年現在の日本の大学の一般的な講義内容としては，その一部に対応する．しかし，本書の説明は大学の工学科で行われる講義内容よりも詳細な説明になっている場合も経験から著者は考える．

著者の２01010年１１月現在までに，アインシュタインの特殊相対性理論の速度の変換および質量の変換の２つの PDF 文書を発行したことになる．今後の予定では，アインシュタインの特殊相対性理論での加速度の変換の導出，力の変換の導出，ガリレイ変換の説明および運動方程式の導出――エネルギーの式の導出を含む．――を説明した無償の PDF 文書を発行する予定である．ただし，これらのファイルおよび本書のファイルの内容を合わせても大学課程の特殊相対性理論の内容としては十分なものとは著者は判断していない．

付録

ｉ　エネルギーの変換を使用しない方法での質量の変換の導出

付録ｉでは，エネルギーの変換（4.6）を使用しない方法で質量の変換（4.18）を導出する．付録ｉの方法でも本文と同様の質点の速さおよび慣性座標系の成分の区間を仮定する．

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},(u\ne\pm c)\cdots(4.6)$$

$$m=\frac{m_1\cdot\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.18)$$

（3.46）を使用するので，Ｓ内の質点の速さの区間（3.11），S_1 内の質点の速さの区間（3.10）およびＳの速度（2.1）の成分の区間（2.14）を仮定する．本文の３章で説明したように，(3.46）では速度の変換（3.12）～（3.14）を使用でき

ることを仮定している．

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}\cdots(3.46)\quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(3.47)$$

$$0\le v\le c\cdots(3.11)$$

$$0\le v_1\le c\cdots(3.10)$$

$\mathbf{u}_{S\_S1}=-u\mathbf{i}_1,(u=\mathrm{const.})\cdots(2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

$$-c<u<c\cdots(2.14)$$

静止質量の定義（3.7）を使用すると，静止質量（a.1.1）および静止質量（a.1.2）を記述できる．付録 i では，(3.46)，（a.1.1）および（a.1.2）を使用して，質量の変換（4.18）を導出する．

$$m_0\equiv m(v)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},(0\le v\le c)\cdots(3.7)$$

$$m_0=m\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdots(\mathrm{a.1.1})$$

$$m_0=m_1\cdot\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdots(\mathrm{a.1.2})$$

静止質量（a.1.1）の右辺に（3.46）を代入すると，静止質量（a.1.3）を記述できる．静止質量（a.1.3）を使用すると，静止質量（a.1.2）から（a.1.4）を記述できる．

$$m_0=m\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}\cdots(\mathrm{a.1.3})$$

$$m\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}=m_1\cdot\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdots(\mathrm{a.1.4})$$

（a.1.4）は方程式（a.1.5）に書き換えることができる．（a.1.5）から（a.1.6）を導出できる．

$$\left(m\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}-m_1\right)\cdot\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}=0\cdots(\mathrm{a.1.5})$$

$$m\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}-m_1=0\cdots(\mathrm{a.1.6})$$

方程式（a.1.6）から（4.18）を導出できる．（4.18）は質量の変換である．

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18)$$

(4.18) の両辺に真空中の光の速さ (2.6) の 2 乗を掛けると, (a.1.7) を記述できる. (a.1.7) の右辺を整理すると (a.1.8) に記述できる.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$m \cdot c^2 = \frac{m_1 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot c^2 \cdots (\mathrm{a}.1.7)$$

$$m \cdot c^2 = \frac{m_1 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (\mathrm{a}.1.8)$$

(a.3.1) を使用すると (a.1.9) を記述できる. (a.1.9) はエネルギーの変換である. (a.1.8) から (a.1.9) を書き換える際に, 相対論的質量 (2.23) および相対論的質量 (2.35) を使用した質点の全エネルギー (2.26) および質点の全エネルギー (2.38) を使用することもできる. (2.26) および (2.38) から導出したエネルギーの変換 (a.1.9) は, 質点が真空中の光の速さで移動する場合は使用できない.

$$E(v) = \frac{E_1(v_1) \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (\mathrm{a}.1.9)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdots (2.23)$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{{v_1}^2}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (2.26)$$

$$E_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{{v_1}^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (2.38)$$

ⅱ　エネルギーの変換および質量の変換に対応する逆変換の導出

付録ⅱでは，質量の変換（4.18）の逆変換を導出する．その逆変換となる質量の変換の導出では，速度の変換（5.14）～（5.16）を使用する．速度の変換（5.14）～（5.16）では（a.2.1）を仮定している．さらに，エネルギーの変換（4.6）の逆変換を導出する．速度の変換（5.14）～（5.16）の導出は文献１で示した．

$$m=\frac{m_1\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\cdots(4.18)$$

$$v_{x1}(t_1)=\frac{v_x(t)-u}{1-\dfrac{u}{c^2}\cdot v_x(t)}\cdots(5.14)$$

$$v_{y1}(t_1)=\frac{v_y(t)}{\gamma\cdot\left(1-\dfrac{u}{c^2}\cdot v_x(t)\right)}\cdots(5.15)$$

$$v_{z1}(t_1)=\frac{v_z(t)}{\gamma\cdot\left(1-\dfrac{u}{c^2}\cdot v_x(t)\right)}\cdots(5.16)$$

$$1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x(t)\neq 0\cdots(a.2.1)$$

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}},(u\neq c)\cdots(4.6)$$

質量の変換（4.18）の右辺では慣性座標系 S_1 内の質点の質量およびその質点の速度の x_1 成分を記述した．それらの情報を使用して，質量の変換（4.18）の左辺ではその質点の慣性座標系 S 内での質量を知ることができる．ここで導出する逆変換の導出は，付録ⅰで使用した方法と同じものである．ただし， 逆変換では，慣性座標系 S 内の質点の情報――質量およびその質点の速度の x 成分のこと．――を使用して，その質点の慣性座標系 S_1 内の質量を知ることができるものとする．

$$m_0=m\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdots(a.1.1)$$

$$m_0=m_1\cdot\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdots(a.1.2)$$

（3.20）のように（3.32）を計算する．（3.32）の右辺に速度の変換（5.14）～（5.16）を代入すると，（a.2.2）になる．

$$v^2={v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2\cdots(3.20)$$

$${v_1}^2={v_{x1}}^2+{v_{y1}}^2+{v_{z1}}^2\cdots(3.32)$$

$$v_1{}^2 = v_{x1}{}^2 + v_{y1}{}^2 + v_{z1}{}^2 = \left(\frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\cdot v_x}\right)^2 + \left(v_y \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x}\right)^2 + \left(v_z \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x}\right)^2 \cdots (\mathrm{a.2.2})$$

（a.2.2）の右辺の分母はすべて等しい．（a.2.2）の右辺は，（a.2.3）に記述できる．

$$v_1{}^2 = \frac{(v_x - u)^2 + v_y{}^2 \cdot \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) + v_z{}^2 \cdot \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.3})$$

（a.2.3）の右辺の分子に記述した第１項を展開する．さらに，（a.2.3）の右辺の分子に記述した第２項および第３項を共通の係数でまとめる．これらの計算から（a.2.3）を（a.2.4）に記述できる．

$$v_1{}^2 = \frac{\left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.4})$$

（a.2.4）の右辺の分子の第２項に記述した係数を計算して，（a.2.4）を（a.2.5）に記述する．真空中の光の速さ（2.6）の２乗を（a.2.5）の分母および分子に掛けて整理すると，（a.2.6）に記述できる．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$v_1{}^2 = \frac{c^2 \cdot \left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(c^2 - u^2\right)}{c^2 \cdot \left(1-\frac{u}{c^2}\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.5})$$

$$v_1{}^2 = \frac{c^4 \cdot \left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + c^2 \cdot \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.6})$$

（a.2.7）の左辺を計算する．（a.2.6）を（a.2.7）の左辺の第２項に代入すると，（a.2.7）の右辺を記述できる．（a.2.7）の右辺で分母を等しくして書き直すと，（a.2.8）の右辺になる．

$$c^2 - v_1{}^2 = c^2 - \frac{c^4 \cdot \left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + c^2 \cdot \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.7})$$

$$c^2 - v_1{}^2 = \frac{c^2 \cdot \left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2}{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2} - \frac{c^4 \cdot \left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + c^2 \cdot \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.8})$$

真空中の光の速さ（2.6）の２乗で（a.2.8）の右辺の第２項を整理して，（a.2.9）を記述する．そして，真空中の光の速さ（2.6）の２乗で（a.2.9）の右辺の分子を整理すると，（a.2.10）になる．

$$c^2 - v_1{}^2 = \frac{c^2 \cdot \left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2 - c^2 \cdot \left\{c^2 \cdot \left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(c^2 - u^2\right)\right\}}{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.9})$$

$$c^2 - v_1{}^2 = c^2 \times \frac{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v_x{}^2 - 2\cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left(v_y{}^2 + v_z{}^2\right)\cdot\left(c^2 - u^2\right)\right\}}{\left(c^2 - u\cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a.2.10})$$

（a.2.10）の右辺の分子に記述した第１項を展開して，（a.2.11）を記述する．次に，（a.2.11）の右辺の分子に記述した中括弧内の第２項を真空中の光の速さ（2.6）の２乗および慣性座標系の成分の２乗で整理すると（a.2.12）を記述できる．

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x + (u \cdot v_x)^2 - \left\{c^2 \cdot \left({v_x}^2 - 2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left({v_y}^2 + {v_z}^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)\right\}}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.11)$$

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x + (u \cdot v_x)^2 - \left\{c^2 \cdot \left({v_x}^2 - 2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left({v_y}^2 + {v_z}^2\right) \cdot c^2 - \left({v_y}^2 + {v_z}^2\right) \cdot u^2\right\}}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.12)$$

（a.2.12）の中括弧内を（3.20）の右辺で整理して，（a.2.13）を記述する．（3.20）の左辺を使用すると，（a.2.13）の右辺は（a.2.14）の右辺のように記述できる．

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2 \cdots (3.20)$$

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x + (u \cdot v_x)^2 - \left\{c^2 \cdot \left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right) + c^2 \cdot \left(-2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) - \left({v_y}^2 + {v_z}^2\right) \cdot u^2\right\}}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.13)$$

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x + (u \cdot v_x)^2 - \left\{c^2 \cdot \left(v^2 - 2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) - \left({v_y}^2 + {v_z}^2\right) \cdot u^2\right\}}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.14)$$

（a.2.14）の右辺の中括弧を外して，（a.2.15）を記述する．（a.2.15）の右辺の分子に記述した第３項および第５項の括弧を外して（a.2.16）を記述する．

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x + (u \cdot v_x)^2 - c^2 \cdot \left(v^2 - 2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) + \left(v^2 - {v_x}^2\right) \cdot u^2}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.15)$$

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x + u^2 \cdot {v_x}^2 - c^2 \cdot \left(v^2 - 2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) + v^2 \cdot u^2 - u^2 \cdot {v_x}^2}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.16)$$

（a.2.16）の右辺の第３項および第６項は互いに打ち消しあう．このことから，（a.2.16）は（a.2.17）に記述できる．

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot u \cdot v_x - c^2 \cdot \left(v^2 - 2 \cdot v_x \cdot u + u^2\right) + v^2 \cdot u^2}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.17)$$

（a.2.17）の右辺の分子に記述した第２項は，括弧内の第２項と互いに打ち消しあう．このことから，（a.2.17）は（a.2.18）に記述できる．

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - c^2 \cdot \left(v^2 + u^2\right) + v^2 \cdot u^2}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.18)$$

（a.2.18）の右辺の括弧を外して，（3.20）について整理すると（a.2.19）を記述できる．（a.2.19）の右辺の分子に記述した第１項および第２項の真空中の光の速さ（2.6）の２乗について整理して，（a.2.20）を記述する．

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^4 - c^2 \cdot u^2 + v^2 \cdot \left(u^2 - c^2\right)}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.19)$$

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{c^2 \cdot \left(c^2 - u^2\right) + v^2 \cdot \left(u^2 - c^2\right)}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.20)$$

（a.2.20）の右辺の分子は共通因子でまとめると，（a.2.21）に記述できる．（a.2.21）を（a.2.22）に記述する．（a.2.22）の両辺を真空中の光の速さ（2.6）の２乗で割って（a.2.23）を記述する．

$$c^2 - {v_1}^2 = c^2 \times \frac{\left(c^2 - v^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.21)$$

$$c^2 - {v_1}^2 = \frac{c^2 \cdot \left(c^2 - v^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.22)$$

$$1 - \frac{{v_1}^2}{c^2} = \frac{\left(c^2 - v^2\right) \cdot \left(c^2 - u^2\right)}{\left(c^2 - u \cdot v_x\right)^2} \cdots (\mathrm{a}.2.23)$$

（a.2.23）の右辺を真空中の光の速さ（2.6）の２乗で整理すると（a.2.24）に記述できる．（a.2.24）の右辺を整理すると，（a.2.25）に記述できる．

$$1-\frac{{v_1}^2}{c^2}=\frac{c^2\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot c^2\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{c^4\cdot\left(1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.2.24})$$

$$1-\frac{{v_1}^2}{c^2}=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.2.25})$$

（a.2.25）から（a.2.26）を記述できる．（a.2.26）の右辺は静止質量（a.1.2）の右辺に記述されているものである．

$$\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}}\cdots(\text{a.2.26})$$

$$m_0=m_1\cdot\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdots(\text{a.1.2})$$

（a.2.26）は（a.2.27）に書き換えることができる．（a.2.27）の左辺では区間（2.37）を仮定している．（a.2.27）の右辺では，区間（2.25）および区間（2.14）を仮定している．本書では，（a.2.27）の右辺で仮定した区間（2.14）は慣性座標系 S_1 の速度（2.2）の成分であるものとして扱う．

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}}=\frac{1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(\text{a.2.27})$$

$0\le v_1<c\cdots(2.37)$

$0\le v<c\cdots(2.25)$

$-c<u<c\cdots(2.14)$

$\mathbf{u}_{S1\_S}=u\mathbf{i},(u=\text{const.})\cdots(2.2)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度

静止質量（a.1.2）の右辺に（a.2.26）を代入すると，（a.2.28）になる．（a.1.1）の左辺に（a.2.28）を代入すると，（a.2.29）を記述できる．

$$m_0=m_1\cdot\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}\cdots(\text{a.1.2})$$

$$m_0=m_1\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}}\cdots(\text{a.2.28})$$

$$m_0=m\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdots(\text{a.1.1})$$

$$m_1 \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u \cdot v_x}{c^2}} = m \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdots (\mathrm{a.2.29})$$

（a.2.29）は方程式（a.2.30）に記述できる．（a.2.30）から（a.2.31）を導出できる．

$$\left(m_1 \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u \cdot v_x}{c^2}} - m \right) \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0 \cdots (\mathrm{a.2.30})$$

$$m_1 \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u \cdot v_x}{c^2}} - m = 0 \cdots (\mathrm{a.2.31})$$

（a.2.31）から質量の変換（a.2.32）を導出できる．（a.2.32）は（4.18）の逆変換である．

$$m_1 = m \cdot \frac{1-\frac{u \cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (\mathrm{a.2.32})$$

$$m = \frac{m_1 \cdot \left(1+\frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.18)$$

（a.2.32）の両辺に真空中の光の速さ（2.6）の 2 乗を掛けると（a.2.33）になる．（a.2.33）は整理して（a.2.34）に記述できる．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$m_1 \cdot c^2 = m \cdot \frac{1-\frac{u \cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot c^2 \cdots (\mathrm{a.2.33})$$

$$m_1 \cdot c^2 = m \cdot c^2 \cdot \frac{1-\frac{u \cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (\mathrm{a.2.34})$$

（a.3.1）を使用して（a.2.34）を（a.2.35）に書き換えることができる．（a.2.35）はエネルギーの変換である．エネルギーの変換（a.2.35）は（4.6）の逆変換である．

$$E_1(v_1)=E(v)\cdot\frac{1-\frac{u\cdot v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(\mathrm{a}.2.35)$$

$$E(v)=E_1(v_1)\times\frac{1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},(u\neq c)\cdots(4.6)$$

質点の全エネルギー（2.27）および質点の全エネルギー（2.39）を使用しても，(a.2.34）から（a.2.35）を導出できる．(2.27）および（2.39）を使用して導出した（a.2.35）は，相対論的質量を使用しているので質点の速さは真空中の光の速さに等しくはならない．

$$E=m\times c^2\cdots(2.27)$$

$$E_1=m_1\times c^2\cdots(2.39)$$

質量の変換（a.2.32）の左辺は慣性座標系 S 内に仮定した質点の質量である．質量の変換（a.2.32）の右辺には，慣性座標系 S に仮定した質点の質量および質点の速さを記述している．本書では，質量の変換（a.2.32）の右辺には，慣性座標系 S 内の成分で記述した慣性座標系 S_1 の速度（2.2）の成分が記述されているものと扱う．

iii　質点のエネルギーの定義について [2), 3)]

アインシュタインの特殊相対性理論で，２００８年６月現在の著者が採用する立場では質点の持つ全エネルギーを次のように扱う．慣性座標系 S に仮定した質点のもつ全エネルギーを（a.3.1）で定義する．エネルギー（a.3.1）の右辺に記述している質量を，仮定した質点の慣性座標系 S 内での質量とする．エネルギー (a.3.1) の右辺には真空中の光の速さ (2.6) を記述している．

$$E\equiv m_S\times c^2\cdots(\mathrm{a}.3.1)$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\times\varepsilon_0}},(c\neq 0,c>0)\cdots(2.6)$$

エネルギー（a.3.1）の右辺の質量は相対論的質量（2.23）で記述できることは保証されない．(a.3.1）を使用すると，エネルギー（a.3.1）を持つ質点の慣性座標系 S 内での質量は（a.3.2）で記述できる．

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdots(2.23)$$

$$m_S=\frac{E}{c^2}\cdots(\mathrm{a}.3.2)$$

もし，質点が真空中の光の速さ（2.6）で移動しているならば，相対論的質量（2.23）は使用できない．この場合で相対論的質量（2.23）が使用できない理由は，(2.23）の定義区間（2.25）内から真空中の光の速さ（2.6）は外れていることである．

$$0\leq v<c\cdots(2.25)$$

一方，エネルギー（a.3.1）を使用すると，エネルギー（a.3.1）を持つ質点は慣性座標系 S 内で真空中の光の速さ（2.6）で移動していても質量（a.3.2）を持つものと扱うことになる．

エネルギー（a.3.1）と同様に，慣性座標系 S_1 に仮定した質点のもつ全エネルギーを（a.3.3）で定義する．エネルギー

（a.3.3）の右辺に記述している質量を，仮定した質点の慣性座標系 S_1 内での質量とする．エネルギー（a.3.3）の右辺には真空中の光の速さ（2.6）を記述している．

$$E_1 \equiv m_{S1} \times c^2 \cdots (\mathrm{a}.3.3)$$

エネルギー（a.3.3）の右辺の質量は相対論的質量（2.35）で記述できることは保証されない．（a.3.3）を使用すると，エネルギー（a.3.3）を持つ質点の慣性座標系 S_1 内での質量は（a.3.4）で記述できる．

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}} \cdots (2.35)$$

$$m_{S1} = \frac{E_1}{c^2} \cdots (\mathrm{a}.3.4)$$

アインシュタインの特殊相対性理論では，（a.3.1）を次のように解釈することがある．（a.3.1）では，質量の保存およびエネルギーの保存がひとつの式（a.3.1）――（a.3.3）でも同様である．――で記述されているものと解釈する．（a.3.1）の右辺の質量が変化すると，（a.3.1）の左辺のエネルギーが変化する．もし，（a.3.1）の右辺の質量の変化量が零で質量が保存されている場合は，（a.3.1）の左辺のエネルギーの変化量も零でエネルギーが保存されているものと考えることができる．このことから，（a.3.1）および（a.3.3）では質量の保存はエネルギーの保存に対応するものと解釈できる．

（a.3.1）および（a.3.3）では，エネルギーの保存および質量の保存の両方をそのように説明できる．このことは，力学的エネルギー保存の法則および系のエネルギー保存則では質量の保存を説明していないことから，（a.3.1）および（a.3.3）の特徴的な観点である．付録ⅲの考察では，（a.3.1）および（a.3.3）を質点の全エネルギーとして定義した場合として，（2.26）および（2.38）を質点の全エネルギーとして扱う．文献１２の付録では，（a.3.1）および（a.3.3）に直接には結びつけないで，（2.26）および（2.38）を質点系の全エネルギーとして扱う考察を与えた．（a.3.1）および（a.3.3）を系の内部エネルギーとして，系のエネルギー保存則に応用する解釈もある．力学的エネルギー保存の法則および系のエネルギー保存則については，文献１２で簡単な説明をした．このように，エネルギーの保存および質量の保存の両方を考えることは（2.26）および（2.38）でも同様である．

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (2.26)$$

$$E_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{c^2}}} \times c^2 \cdots (2.38)$$

ⅳ　真空中の光の速度の変換について

慣性座標系 S_1 内で真空中の光の速さ（2.6）で移動する質点の速さを慣性座標系 S 内の速さに変換する．慣性座標系 S 内の質点の速度ベクトルは（2.16）で記述する．慣性座標系 S_1 内の質点の速度ベクトルは（2.28）で記述する．速度の変換（3.15）～（3.17）を使用する．（3.15）～（3.17）では係数（2.12）を使用する．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \cdots (2.16)$$

$$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x1} \mathbf{i}_1 + v_{y1} \mathbf{j}_1 + v_{z1} \mathbf{k}_1 \cdots (2.28)$$

$v_x(t)=\dfrac{v_{x1}+u}{1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}}\cdots(3.15)$ 速度（2.16）の x 成分――速度の変換――

$v_y(t)=\dfrac{v_{y1}(t_1)}{\gamma\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}\cdots(3.16)$ 速度（2.16）の y 成分――速度の変換――

$v_z(t)=\dfrac{v_{z1}(t_1)}{\gamma\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)}\cdots(3.17)$ 速度（2.16）の z 成分――速度の変換――

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}(=\mathrm{const.})\cdots(2.12)$$

慣性座標系 S_1 内で質点が真空中の光の速さ（2.6）で移動しているので（a.4.1）を記述できる．速度の変換（3.15）～（3.17）を使用して，慣性座標系 S 内の質点の速さの２乗を（a.4.2）で記述する．

$$c^2=(v_{x1}(t))^2+(v_{y1}(t))^2+(v_{z1}(t))^2\cdots(\mathrm{a}.4.1)$$

$$(v(t))^2=(v_x(t))^2+(v_y(t))^2+(v_z(t))^2=\frac{(v_{x1}+u)^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{(v_{y1}(t_1))^2}{\gamma^2\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{(v_{z1}(t_1))^2}{\gamma^2\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\mathrm{a}.4.2)$$

係数（2.12）を使用して，（a.4.2）の右辺は（a.4.3）に整理できる．（a.4.3）の右辺の第１項の分子を展開すると（a.4.4）の右辺になる．

$$\frac{(v_{x1}+u)^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{(v_{y1}(t_1))^2}{\gamma^2\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{(v_{z1}(t_1))^2}{\gamma^2\cdot\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{(v_{x1}+u)^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{y1}(t_1))^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{z1}(t_1))^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\mathrm{a}.4.3)$$

$$\frac{(v_{x1}+u)^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{y1}(t_1))^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}+\frac{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{z1}(t_1))^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{v^2{}_{x1}+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2+\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{y1}(t_1))^2+\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{z1}(t_1))^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\mathrm{a}.4.4)$$

（a.4.4）の右辺に記述した分子の第３項および第４項を展開すると（a.4.5）の右辺になる．（a.4.1）の右辺を記述できる（a.4.5）の各項をまとめて（a.4.6）のように記述できる．

$$\frac{{v_{x1}}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2+\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{y1}(t_1))^2+\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\cdot(v_{z1}(t_1))^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{{v_{x1}}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2+{v_{y1}}^2-\dfrac{u^2}{c^2}\cdot{v_{y1}}^2+{v_{z1}}^2-\dfrac{u^2}{c^2}\cdot{v_{z1}}^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\mathrm{a}.4.5)$$

$$\frac{{v_{x1}}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2+{v_{y1}}^2-\dfrac{u^2}{c^2}\cdot{v_{y1}}^2+{v_{z1}}^2-\dfrac{u^2}{c^2}\cdot{v_{z1}}^2}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{{v_{x1}}^2+{v_{y1}}^2+{v_{z1}}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2-\dfrac{u^2}{c^2}\cdot\left({v_{y1}}^2+{v_{z1}}^2\right)\cdot}{\left(1+\dfrac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\mathrm{a}.4.6)$$

（a.4.6）の右辺に記述した分子の第１項〜第３項を（a.4.7）の右辺に記述した分子の第１項のように記述する．（a.4.1）を使用して，（a.4.6）の右辺に記述した分子の第６項を（a.4.7）のように書き換える．

$$\frac{v_{x1}{}^2+v_{y1}{}^2+v_{z1}{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2-\frac{u^2}{c^2}\cdot\left(v_{y1}{}^2+v_{z1}{}^2\right)\cdot}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{v_1{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2-\frac{u^2}{c^2}\cdot\left(c^2-v_{x1}{}^2\right)\cdot}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.4.7})$$

（a.4.8）の右辺に記述した分子の第４項を展開して（a.4.8）の右辺のように記述する．（a.4.8）の右辺に記述した分子の第３項および第４項は加算して零にできるので（a.4.9）のように記述できる．

$$\frac{v_1{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2-\frac{u^2}{c^2}\cdot\left(c^2-v_{x1}{}^2\right)\cdot}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{v_1{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2-u^2+\frac{u^2}{c^2}\cdot v_{x1}{}^2\cdot}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.4.8})$$

$$\frac{v_1{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+u^2-u^2+\frac{u^2}{c^2}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{v_1{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+\frac{u^2}{c^2}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.4.9})$$

（a.4.1）の左辺を（a.4.9）の右辺に記述した分子の第１項に代入すると（a.4.10）の右辺になる．（a.4.10）の右辺を真空中の光の速さの２乗で整理すると（a.4.11）の右辺を記述できる．

$$\frac{v_1{}^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+\frac{u^2}{c^2}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=\frac{c^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+\frac{u^2}{c^2}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.4.10})$$

$$\frac{c^2+2\cdot v_{x1}\cdot u+\frac{u^2}{c^2}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=c^2\cdot\frac{1+2\cdot\frac{v_{x1}\cdot u}{c^2}+\frac{u^2}{c^4}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}\cdots(\text{a.4.11})$$

（a.4.11）の右辺は（a.4.12）の真ん中の項のように整理でき（a.4.12）の右辺のようになる．（a.4.12）では慣性座標系Ｓ内の質点の速さは真空中の光の速さであることを示している．（a.4.1）および（a.4.12）を使用すると慣性座標系Ｓ１内を真空中の光の速さ（2.6）で移動する質点は慣性座標系Ｓ内を真空中の光の速さ（2.6）で移動する．このことは，（a.4.13）を記述できる．

$$c^2\cdot\frac{1+2\cdot\frac{v_{x1}\cdot u}{c^2}+\frac{u^2}{c^4}\cdot v_{x1}{}^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=c^2\cdot\frac{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}{\left(1+\frac{u\cdot v_{x1}}{c^2}\right)^2}=c^2\cdots(\text{a.4.12})$$

$$c^2=\left(v_x(t)\right)^2+\left(v_y(t)\right)^2+\left(v_z(t)\right)^2=\left(v_{x1}(t)\right)^2+\left(v_{y1}(t)\right)^2+\left(v_{z1}(t)\right)^2\cdots(\text{a.4.13})$$

v　真空中の光の波長および周波数の変換についての考察

ひとつの慣性座標系から光を送り出すことができる角度は自由に決定できることを仮定できる．その角度および慣性座標系の速度（2.2）の成分uで他方の慣性座標系内での時間を説明できる．光の移動時間が異なることで，光の移動距離が異なることを特殊相対性原理および光速度の不変の原理から説明できる．

$\mathbf{u}_{S1\_S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.2)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S1 の等速度

もし，光の波長分の移動距離が異なるならば，光の振動数も異なるものと特殊相対性理論では考えることができる．光の波長が異なることでは，光の周期が異なることを意味する．光の周期が異なることは波長分を移動する光の移動時間が異なることを意味する．ひとつの慣性座標系内での光の移動時間は他方の慣性座標系内での光の移動時間との関係式で説明できる．付録 v では，光の移動時間から図 7.1.1 の時計内で送り出す光の周期の長短を考察する．光の周期の長短を考察することで，光の振動数の長短を考察することができる．

図 7.1.1 の時計内で垂直方向以外の向きに送信機から光が送り出された場合では，その光の垂直方向の移動距離（7.1.1）は（7.1.3）とは異なる．その場合では，図 7.1.1 の時計の時間には垂直方向からのずれの分の誤差が現れる．図 7.1.1 の時計では，送信機から光を送り出す角度は誤差を決定するひとつの要因である．

$\Delta y \cdots (7.1.1)$ 送信機から送り出された真空中の光の垂直方向での移動距離

$\Delta y = c \cdot \Delta t \cdots (7.1.3)$ 真空中の光の垂直方向での移動距離と時間の関係

図 7.1.1 の時計で観測する時間は（7.1.4）で記述できる．（7.1.1）が（7.1.3）とは異なる場合でも図 7.1.1 の時計では時間を（7.1.4）で計算する．一般に，慣性座標系 S 内で等速度運動する図 7.1.1 の時計の時点は慣性座標系 S 内で静止している図 7.1.1 の時計の時点とは異なる．そのような慣性座標系 S で観測する時間（7.1.36）は，図 7.1.1 の時計で観測する時間（7.1.30）とは（7.1.41）のように異なることを 7 章 1 節で説明した．

$\Delta t = \dfrac{\Delta y}{c} \cdots (7.1.4)$ 時計の時間

$\Delta t_s \cdots (7.1.36)$ 慣性座標系 S 内で等速度運度している時計の光の移動時間

$\Delta t_{s1}\,\mathrm{s} \cdots (7.1.30)$

$$\Delta t_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.41)$$

図 7.1.4 では慣性座標系 S 内での光の速度ベクトルの和を示した．図 7.1.1 の時計では，関係（7.1.46）を満足するように真空中の光が移動する．（7.1.46）では，慣性座標系 S_1 で静止する図 7.1.1 の時計内での光の軌跡は垂直方向に線分を描き，慣性座標系 S 内での光の軌跡は斜め上方に線分を描いた．慣性座標系 S 内で移動している図 7.1.1 の時計内での光の移動距離よりも静止している図 7.1.1 の時計内での光の移動距離が短いことは，既に（7.1.46）で説明をした．慣性座標系 S での光の移動距離が光の波長分に一致した後に慣性座標系 S_1 での光の移動距離が波長分に一致する場合を，（7.1.46）で考えることができる．一般には慣性座標系 S_1 で静止する図 7.1.1 の時計内での光の波長分の移動距離が，その光の波長である．

$c \cdot \Delta t_s \cdot \sin\theta = c \cdot \Delta t_{s1} \cdots (7.1.46)$ 慣性座標系 S_1 内での光の垂直上への移動距離

光の移動距離（7.1）が異なることからは観測する光の移動時間（7.5）が異なることを仮定できる．波長分の移動距離（a.5.1）に真空中の光の速さとの関係（a.5.2）を与えられ，光の移動時間に光の周期Tを使用できる．（7.1.46）で慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 で観測できるそれぞれの光の波長を考えた．（a.5.2）の左辺の波長が異なる値になるならば（a.5.2）の右辺の周期が異なる値になることは明らかである．

$c \cdot \Delta t = \Delta r \cdots (7.1)$ 真空中の光の移動距離

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{c} \cdots (7.5)$$

$$\Delta r = \lambda \cdots (\mathrm{a.5.1})$$

$$\lambda = c \cdot T \cdots (\mathrm{a.5.2})$$

慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 内での真空中の光の移動時間（7.5）を記述するためにローレンツ変換の時点の式を使用する．ローレンツ変換（2.8）～（2.11）の逆変換は（a.5.3）～（a.5.6）で説明できる．時点の式（2.11）および逆変換の時点の式（a.5.6）を使用して，慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 での光の移動時間を計算できる．

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \cdots (2.8)$$

$$y_1 = y \cdots (2.9)$$

$$z_1 = z \cdots (2.10)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \cdots (2.11)$$

$$x = \gamma \cdot (x_1 + u \cdot t_1) \cdots (\mathrm{a.5.3})$$

$$y = y_1 \cdots (\mathrm{a.5.4})$$

$$z = z_1 \cdots (\mathrm{a.5.5})$$

$$t = \gamma \cdot \left(t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot x_1 \right) \cdots (\mathrm{a.5.6})$$

慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 での真空中の光の速さは（4.9）であることは付録ⅳで示した．光が慣性座標系 S_1 の x 軸に対して角度（a.5.7）で進むものと仮定する．その場合での慣性座標系 S の x 軸に対して角度（a.5.8）で，その光が進むものと仮定する．

$$v = v_1 = c \cdots (4.9)$$

$$\theta_{x1} \cdots (\mathrm{a.5.7})$$

$$\theta_x \cdots (\mathrm{a.5.8})$$

その光の速度の x 軸成分は慣性座標系 S_1 では（a.5.9）である．その光の速度の x 軸成分は慣性座標系 S では（a.5.10）である．

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = c \cdot \cos\theta_{x1} = \mathrm{const}, (\Delta t_1 \neq 0) \cdots (\mathrm{a.5.9})$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c \cdot \cos\theta_x = \mathrm{const}, (\Delta t \neq 0) \cdots (\mathrm{a.5.10})$$

時点の式（a.5.6）を使用すると，時間（a.5.11）を記述できる．時間（a.5.11）の右辺から（a.5.12）の右辺を導出できる．慣性座標系 S_1 では角度（a.5.7）で光が送り出されることから，（a.5.12）の右辺に光の速度の x 軸成分（a.5.9）を代入すると（a.5.13）を記述できる．（a.5.13）では，慣性座標系 S 内での光の移動時間 Δt および慣性座標系 S_1 内での光の移動時間 Δt_1 の関係を記述している．

$$\Delta t = \gamma \cdot \left(\Delta t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_1 \right) \cdots (\mathrm{a.5.11})$$

$$\Delta t=\Delta t_1\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\right),(\Delta t_1\neq 0)\cdots(\text{a}.5.12)$$

$$\Delta t=\Delta t_1\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a}.5.13)$$

関係式（a.5.13）と数学で等価な記述を時点の式（2.11）から導出できる．時点の式（2.11）を使用すると，時間（a.5.14）を記述できる．時間（a.5.14）の右辺から（a.5.15）の右辺を導出できる．慣性座標系 S では角度（a.5.8）で光が送り出されることから，（a.5.15）の右辺に光の速度の x 軸成分（a.5.10）を代入すると（a.5.16）を記述できる．

$$\Delta t_1=\gamma\cdot\left(\Delta t-\frac{u}{c^2}\cdot\Delta x\right)\cdots(\text{a}.5.14)$$

$$\Delta t_1=\Delta t\cdot\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\right),(\Delta t\neq 0)\cdots(\text{a}.5.15)$$

$$\Delta t_1=\Delta t\cdot\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_x\right)\cdots(\text{a}.5.16)$$

（a.5.13）および（a.5.16）は互いの記述に書き直すことができる．（a.5.16）を（a.5.13）の右辺に代入すると（a.5.17）になる．（a.5.17）は（a.5.18）に整理できる．（a.5.18）から（a.5.19）を導出できる．

$$\Delta t=\Delta t\cdot\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_x\right)\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a}.5.17)$$

$$\Delta t=\Delta t\cdot\gamma^2\cdot\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_x\right)\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a}.5.18)$$

$$\gamma^2\cdot\left(1-\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_x\right)\cdot\left(1+\frac{u}{c^2}\cdot c\cdot\cos\theta_{x1}\right)=1\cdots(\text{a}.5.19)$$

（a.5.19）は（a.5.20）および（a.5.21）に書き直すことができる．（a.5.20）を使用すると（a.5.13）は（a.5.16）に書き直すことができる．（a.5.21）を使用すると（a.5.16）は（a.5.13）に書き直すことができる．

$$\frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a}.5.20)$$

$$\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a}.5.21)$$

関係式（a.5.13）は（a.5.22）に書き直すことができる．関係式（a.5.16）は（a.5.23）に書き直すことができる．（a.5.22）の右辺は慣性座標系の速度（2.1）の成分および光が送り出される角度（a.5.7）で値を決定できる．（a.5.23）の右辺は慣性座標系の速度（2.2）の成分および光が送り出される角度（a.5.8）で値を決定できる．

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_1}=\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a}.5.22)$$

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t}=\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x}\right)\cdots(\text{a}.5.23)$$

$\mathbf{u}_{S\_S1} = -u\mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \cdots (2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度
$\mathbf{u}_{S1\_S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.2)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度

慣性座標系 S 内を等速度運動している光の周期が慣性座標系 S_1 内では（a.5.24）であるものと仮定する．慣性座標系 S_1 内で光の移動時間が周期（a.5.24）に等しくなったときに，慣性座標系 S 内の移動時間は（a.5.25）であるものと仮定する．

$T_1 \cdots (\text{a.5.24})$

$\Delta t_{tr} \cdots (\text{a.5.25})$

慣性座標系 S 内を等速度運動している光の周期が慣性座標系 S 内では（a.5.26）であるものと仮定する．慣性座標系 S 内で光の移動時間が周期（a.5.26）に等しくなったときに，慣性座標系 S_1 内の移動時間は（a.5.27）であるものと仮定する．

$T \cdots (\text{a.5.26})$

$\Delta t_{tr1} \cdots (\text{a.5.27})$

（a.5.13）に（a.5.24）および（a.5.25）を代入すると時間（a.5.28）を記述できる．時間（a.5.28）は（a.5.29）に書き直すことができる．（a.5.21）を使用すると，（a.5.29）を（a.5.30）に書き直すことができる．（a.5.30）は（a.5.16）に（a.5.24）および（a.5.25）を代入したものに等しい．（a.5.28）の右辺には（a.5.22）を記述している．（a.5.30）の右辺には（a.5.23）を記述している．

$$\Delta t_{tr} = T_1 \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right) \cdots (\text{a.5.28})$$

$$\frac{\Delta t_{tr}}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right)} = T_1 \cdots (\text{a.5.29})$$

$$T_1 = \Delta t_{tr} \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_x\right) \cdots (\text{a.5.30})$$

（a.5.13）に（a.5.26）および（a.5.27）を代入すると時間（a.5.31）を記述できる．時間（a.5.31）は（a.5.32）に書き直すことができる．(a.5.21) を使用すると，(a.5.32) を (a.5.33) に書き直すことができる．(a.5.33) は (a.5.16) に (a.5.26) および（a.5.27）を代入したものに等しい．（a.5.31）の右辺には（a.5.22）を記述している．（a.5.33）の右辺には（a.5.23）を記述している．

$$T = \Delta t_{tr1} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right) \cdots (\text{a.5.31})$$

$$\frac{T}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right)} = \Delta t_{tr1} \cdots (\text{a.5.32})$$

$$\Delta t_{tr1} = T \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_x\right) \cdots (\text{a.5.33})$$

（a.5.28）および（a.5.31）には（a.5.22）を記述している．このことでは，（a.5.34）を記述できる．

$$\frac{\Delta t_{tr1}}{T} = \frac{T_1}{\Delta t_{tr}} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_x\right) \cdots (\text{a.5.34})$$

（a.5.30）および（a.5.33）には（a.5.23）を記述している．このことでは，（a.5.35）を記述できる．

$$\frac{T}{\Delta t_{tr1}} = \frac{\Delta t_{tr}}{T_1} = \gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right) \cdots (\text{a.5.35})$$

（a.5.34）および（a.5.35）の右辺では，真空中の光の速さ（2.6）は定数である．慣性座標系の速さおよび光が送り出される角度で各慣性座標系の時間の比を決定できる．（a.5.34）の右辺に記述した角度（a.5.8）および（a.5.35）の右辺に記述した角度（a.5.7）はどちらか一方が決定すると他方が決定する．このことを記述した関係式を次に導出する．

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \cdots (2.6)$$

　その関係式を導出するのに（a.5.19）を使用する．（a.5.19）の左辺には（2.12）を記述している．（a.5.19）および（2.12）を使用すると（a.5.36）を記述できる．

$$\gamma^2 \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot c \cdot \cos\theta_x\right) \cdot \left(1 + \frac{u}{c^2} \cdot c \cdot \cos\theta_{x1}\right) = 1 \cdots (\text{a.5.19})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.12)$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right) \cdot \left(1 - \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_x\right) \cdots (\text{a.5.36})$$

（a.5.36）は（a.5.37）に書き直すことができる．（a.5.37）を（a.5.38）のように整理する．（a.5.38）の左辺は（a.5.38）の右辺の第２項に記述した２つの余弦の積に掛けた係数に等しいものとして解釈できる．このことで，(a.5.38) は (a.5.39) の左辺のように整理できる．

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1} - \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_x - \frac{u^2}{c^2} \cdot \cos\theta_x \cdot \cos\theta_{x1} \cdots (\text{a.5.37})$$

$$-\frac{u^2}{c^2} = \frac{u}{c} \cdot (\cos\theta_{x1} - \cos\theta_x) - \frac{u^2}{c^2} \cdot \cos\theta_x \cdot \cos\theta_{x1} \cdots (\text{a.5.38})$$

$$\frac{u^2}{c^2}(\cos\theta_x \cdot \cos\theta_{x1} - 1) = \frac{u}{c} \cdot (\cos\theta_{x1} - \cos\theta_x) \cdot \cdots (\text{a.5.39})$$

（a.5.39）の両辺の括弧に掛けた係数に共通になる $\frac{u}{c}$ があるので，（a.5.40）を導出できる．（a.5.40）の左辺を移項すると（a.5.41）を記述できる．

$$\frac{u}{c}(\cos\theta_x \cdot \cos\theta_{x1} - 1) = \cos\theta_{x1} - \cos\theta_x \cdots (\text{a.5.40})$$

$$\cos\theta_{x1} - \cos\theta_x - \frac{u}{c}(\cos\theta_x \cdot \cos\theta_{x1} - 1) = 0 \cdots (\text{a.5.41})$$

（a.5.41）の左辺の第３項を展開すると（a.5.42）になる．（a.5.42）を慣性座標系 S_1 内での角度（a.5.7）の余弦で整理すると (a.5.43) になる．(a.5.43) は (a.5.44) に書き直すことができる．(a.5.44) の左辺は慣性座標系 S_1 内での角度 (a.5.7) の余弦である．

$$\cos\theta_{x1} - \cos\theta_x - \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_x \cdot \cos\theta_{x1} + \frac{u}{c} = 0 \cdots (\text{a.5.42})$$

$$\theta_{x1} \cdots (\text{a.5.7})$$

$$\cos\theta_{x1}\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)-\cos\theta_x+\frac{u}{c}=0\cdots(\text{a.5.43})$$

$$\cos\theta_{x1}=\frac{\cos\theta_x-\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.44})$$

$\tan\theta_{x1}$（a.5.45）を計算する．（a.5.44）を使用して（a.5.46）を記述できる．正接（a.5.45）の右辺に（a.5.46）を代入すると（a.5.47）の右辺になる．

$$\tan\theta_{x1}=\frac{\sin\theta_{x1}}{\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a.5.45})\ \text{正接}$$

$$\frac{1}{\cos\theta_{x1}}=\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\cos\theta_x-\frac{u}{c}}\cdots(\text{a.5.46})$$

$$\frac{\sin\theta_{x1}}{\cos\theta_{x1}}=\sin\theta_{x1}\cdot\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\cos\theta_x-\frac{u}{c}}\cdots(\text{a.5.47})$$

（a.5.47）の右辺に記述されている $\sin\theta_1$ を計算するのに（a.5.48）を使用する．（a.5.44）から（a.5.49）を記述でき，（a.5.49）を（a.5.48）の右辺に代入すると（a.5.50）になる．（a.5.48）の右辺に（a.5.50）の右辺を代入すると（a.5.51）を記述できる．

$$\sin^2\theta_{x1}=1-\cos^2\theta_{x1}\cdots(\text{a.5.48})$$

$$\cos^2\theta_{x1}=\frac{\left(\cos\theta_x-\frac{u}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.49})$$

$$1-\cos^2\theta_{x1}=1-\frac{\left(\cos\theta_x-\frac{u}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.50})$$

$$\sin^2\theta_{x1}=\frac{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2-\left(\cos\theta_x-\frac{u}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.51})$$

（a.5.51）の右辺の分子を展開すると（a.5.52）になる．（a.5.52）の右辺の分子を整理すると（a.5.53）の右辺になる．

$$\sin^2\theta_{x1}=\frac{\left(1-2\cdot\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x+\frac{u^2}{c^2}\cdot\cos^2\theta_x\right)-\left(\cos^2\theta_x-2\cdot\cos\theta_x\cdot\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.52})$$

$$\sin^2\theta_{x1}=\frac{\left(1-\cos^2\theta_x\right)+\frac{u^2}{c^2}\cdot\cos^2\theta_x-\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.53})$$

（a.5.53）の右辺の分子に記述した第２項および第３項を整理すると（a.5.54）になる．（a.5.54）の右辺の分子に（a.5.55）を代入すると（a.5.56）になる．

$$\sin^2\theta_{x1}=\frac{\left(1-\cos^2\theta_x\right)-\left(1-\cos^2\theta_x\right)\cdot\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.54})$$

$$\sin^2\theta_x=1-\cos^2\theta_x\cdots(\text{a.5.55})$$

$$\sin^2\theta_{x1}=\frac{\sin^2\theta_x-\sin^2\theta_x\cdot\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.56})$$

（a.5.56）の右辺の分子を整理すると（a.5.57）になる．（a.5.57）の符号を決定する必要がある．

$$\sin^2\theta_{x1}=\frac{\sin^2\theta_x\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)^2}\cdots(\text{a.5.57})$$

条件（a.5.58）の場合は，一般に（a.5.59）および（a.5.60）が成立する．（a.5.58），（a.5.59）および（a.5.60）を使用すると（a.5.61）を記述できる．

$$\theta_{x1}\approx\theta_x\cdots(\text{a.5.58})$$

$$\sin\theta_{x1}\approx\theta_{x1}\cdots(\text{a.5.59})$$

$$\sin\theta_x\approx\theta_x\cdots(\text{a.5.60})$$

$$\sin\theta_{x1}\approx\sin\theta_x\cdots(\text{a.5.61})$$

条件（a.5.58）が条件（5.43）でも使用できる場合を仮定できる．このことは，２つの慣性座標系が互いに静止している場合に近いことでニュートン力学から仮定できる．条件（5.43）が成立する場合で（a.5.57）で（a.5.61）を満足するには（a.5.62）であることは明らかである．

$$u\ll c\cdots(5.43)$$

$$\sin\theta_{x1}=\frac{\sin\theta_x\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.62})$$

正弦（a.5.62）を $\tan\theta_{x1}$（a.5.47）の右辺に代入すると（a.5.63）になる．（a.5.63）の右辺を整理すると（a.5.64）になる．正接 $\tan\theta_{x1}$（a.5.45）を使用すると，（a.5.64）では $\tan\theta_{x1}$（a.5.65）を記述できる．

$$\frac{\sin\theta_{x1}}{\cos\theta_{x1}} = \frac{\sin\theta_x \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdot \frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\cos\theta_x - \frac{u}{c}} \cdots (\mathrm{a.5.63})$$

$$\frac{\sin\theta_{x1}}{\cos\theta_{x1}} = \frac{\sin\theta_x \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\theta_x - \frac{u}{c}} \cdots (\mathrm{a.5.64})$$

$$\tan\theta_{x1} = \frac{\sin\theta_x \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\theta_x - \frac{u}{c}} \cdots (\mathrm{a.5.65})$$

$\cos\theta_{x1}$（a.5.44）のような$\cos\theta_x$の記述を導出する．余弦（a.5.44）から（a.5.66）を記述できる．（a.5.66）の左辺を展開すると（a.5.67）の左辺になる．

$$\cos\theta_{x1} = \frac{\cos\theta_x - \frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\mathrm{a.5.44})$$

$$\cos\theta_{x1} \cdot \left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right) = \cos\theta_x - \frac{u}{c} \cdots (\mathrm{a.5.66})$$

$$\cos\theta_{x1} - \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\cdot\cos\theta_{x1} = \cos\theta_x - \frac{u}{c} \cdots (\mathrm{a.5.67})$$

（a.5.67）の左辺の第２項を（a.5.67）の右辺に移項すると（a.5.68）になる．（a.5.68）の右辺の第２項を（a.5.68）の左辺に移項すると（a.5.69）になる．

$$\cos\theta_{x1} = \cos\theta_x \cdot \left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right) - \frac{u}{c} \cdots (\mathrm{a.5.68})$$

$$\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c} = \cos\theta_x \cdot \left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right) \cdots (\mathrm{a.5.69})$$

（a.5.69）を使用すると，慣性座標系 S 内での光が送り出された角度（a.5.8）の余弦を（a.5.70）で記述できる．余弦（a.5.70）は余弦（a.5.44）に類似の記述である．これらの記述では，角度および慣性座標系の等速度の成分を考慮することで同じように書き換えられるものと考えることができる．

$$\theta_x \cdots (\mathrm{a.5.8})$$

$$\cos\theta_x = \frac{\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\mathrm{a.5.70})$$

余弦（a.5.70）を使用して，その正弦$\sin\theta$を計算する．余弦（a.5.70）を使用すると，（a.5.55）の右辺は（a.5.71）で記述できる．

$$\sin^2\theta_x = 1-\cos^2\theta_x \cdots (\mathrm{a.5.55})$$

$$\sin^2\theta_x = 1 - \frac{\left(\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.71)$$

（a.5.71）の右辺は（a.5.72）に記述できる．（a.5.72）の右辺の分子を展開すると（a.5.73）の右辺になる．

$$\sin^2\theta_x = \frac{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2 - \left(\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.72)$$

$$\frac{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2 - \left(\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} = \frac{1 + 2\cdot\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1} + \frac{u^2}{c^2}\cdot\cos^2\theta_{x1} - \left(\cos^2\theta_{x1} + 2\cdot\cos\theta_{x1}\cdot\frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.73)$$

（a.5.73）の右辺の分子を整理すると（a.5.74）になる．（a.5.74）の右辺は（a.5.75）のように整理できる．

$$\frac{1 + 2\cdot\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1} + \frac{u^2}{c^2}\cdot\cos^2\theta_{x1} - \left(\cos^2\theta_{x1} + 2\cdot\cos\theta_{x1}\cdot\frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} = \frac{1 + \frac{u^2}{c^2}\cdot\cos^2\theta_{x1} - \cos^2\theta_{x1} - \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.74)$$

$$\frac{1 + \frac{u^2}{c^2}\cdot\cos^2\theta_{x1} - \cos^2\theta_{x1} - \frac{u^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\cos^2\theta_{x1}}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.75)$$

（a.5.75）の右辺は（a.5.76）の右辺のように整理できる．（a.5.55）および（a.5.76）を使用すると（a.5.77）を記述できる．

$$\frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\cos^2\theta_{x1}}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\frac{1 - \cos^2\theta_{x1}}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.76)$$

$$\sin^2\theta_x = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\frac{\sin^2\theta_{x1}}{\left(1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)^2} \cdots (\text{a}.5.77)$$

（a.5.61）であることを考慮すると（a.5.77）から（a.5.78）を導出できる．（a.5.21）を使用すると（a.5.78）は（a.5.62）に書き換えることができる．

$$\sin\theta_{x1} \approx \sin\theta_x \cdots (\text{a}.5.61)$$

$$\sin\theta_x = \sin\theta_{x1}\cdot\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a}.5.78)$$

$$\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a.5.21})$$

$$\sin\theta_{x1}=\sin\theta_x\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.62})$$

$\tan\theta_x$（a.5.79）を計算する．余弦（a.5.70）および正弦（a.5.78）を正接（a.5.79）の右辺に代入すると（a.5.80）を記述できる．

$$\tan\theta_x=\frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.79})\text{正接}$$

$$\frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_x}=\frac{\sin\theta_{x1}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}}{\frac{\cos\theta_{x1}+\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}}\cdots(\text{a.5.80})$$

（a.5.80）の右辺を整理すると（a.5.81）になる．（a.5.79）および（a.5.81）を使用すると正接（a.5.82）を記述できる．

$$\frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_x}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sin\theta_{x1}}{\cos\theta_{x1}+\frac{u}{c}}\cdots(\text{a.5.81})$$

$$\tan\theta_x=\frac{\sin\theta_{x1}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\theta_{x1}+\frac{u}{c}}\cdots(\text{a.5.82})$$

慣性座標系 S_1 内の角度（a.5.7）の余弦（a.5.44），正弦（a.5.62）および正接（a.5.65）では慣性座標系 S で観測できる（2.2）の成分および角度（a.5.8）で説明をしている．慣性座標系 S で観測できる（2.2）の成分および角度（a.5.8）が決定することで余弦（a.5.44），正弦（a.5.62）および正接（a.5.65）が決定する．このことでは，（2.2）で慣性座標系 S での光が進む角度（a.5.8）が決定すると，慣性座標系 S_1 で光が進む角度（a.5.7）が決定する．

$$\theta_{x1}\cdots(\text{a.5.7})$$

$$\cos\theta_{x1}=\frac{\cos\theta_x-\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.44})$$

$$\sin\theta_{x1} = \sin\theta_x \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\text{a.5.62})$$

$$\tan\theta_{x1} = \frac{\sin\theta_x \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\theta_x - \frac{u}{c}} \cdots (\text{a.5.65})$$

$\mathbf{u}_{S1\_S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.2)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度

$\theta_x \cdots (\text{a.5.8})$

慣性座標系 S 内の角度（a.5.8）の余弦（a.5.70），正弦（a.5.78）および正接（a.5.82）では慣性座標系 S_1 で観測できる（2.1）の成分および角度（a.5.7）で説明をしている．慣性座標系 S_1 で観測できる（2.1）の成分および角度（a.5.7）が決定することで余弦（a.5.70），正弦（a.5.78）および正接（a.5.82）が決定する．このことでは，（2.2）で慣性座標系 S_1 での光が進む角度（a.5.7）が決定すると慣性座標系 S で光が進む角度（a.5.8）決定する．

$$\cos\theta_x = \frac{\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a.5.70})$$

$$\sin\theta_x = \sin\theta_{x1} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a.5.78})$$

$$\tan\theta_x = \frac{\sin\theta_{x1} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\theta_{x1} + \frac{u}{c}} \cdots (\text{a.5.82})$$

$\mathbf{u}_{S\_S1} = -u\mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \cdots (2.1)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

慣性座標系 S_1 内で等速度運動する光の波長を（a.5.83）で記述できるものとする．その光の波長は慣性座標系 S で観察すると（a.5.84）で記述できるものとする．

$\lambda_1 = c \cdot T_1 \cdots (\text{a.5.83})$

$\lambda = c \cdot T \cdots (\text{a.5.84})$

慣性座標系 S_1 内の光には（7.1.27）が成立するものとする．慣性座標系 S 内の光には（7.1.7）が成立するものとする．

$c = \nu_1 \cdot \lambda_1 \cdots (7.1.27)$

$c = \nu \cdot \lambda \cdots (7.1.7)$

時間（a.5.28）の両辺に真空中の光の速さを掛けて波長（a.5.83）を代入すると（a.5.85）になる．（a.5.85）の左辺は慣性座標系 S 内での真空中の光の移動距離である．

$$\Delta t_{tr} = T_1 \cdot \gamma \cdot \left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right) \cdots (\text{a.5.28})$$

$$c\cdot\Delta t_{tr}=\lambda_1\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a.5.85})$$

（a.5.85）および（a.5.20）を使用すると（a.5.86）を記述できる．（a.5.86）の左辺は慣性座標系 S_1 内の光の波長である．

$$\frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.20})$$

$$\lambda_1=c\cdot\Delta t_{tr}\cdot\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)\cdots(\text{a.5.86})$$

時間（a.5.33）の両辺に真空中の光の速さを掛けて波長（a.5.84）を代入すると（a.5.87）になる．（a.5.87）の左辺は慣性座標系 S_1 内での真空中の光の移動距離である．

$$\Delta t_{tr1}=T\cdot\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)\cdots(\text{a.5.33})$$

$$c\cdot\Delta t_{tr1}=\lambda\cdot\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)\cdots(\text{a.5.87})$$

（a.5.87）および（a.5.21）を使用すると（a.5.88）を記述できる．（a.5.88）の左辺は慣性座標系 S 内の光の波長である．

$$\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a.5.21})$$

$$\lambda=c\cdot\Delta t_{tr1}\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a.5.88})$$

（a.5.85）および（a.5.87）の左辺では光の移動距離を意味する．（a.5.85）および（a.5.87）の右辺では光の波長を光の移動距離に変換している．（a.5.86）および（a.5.88）の左辺では光の波長を意味する．（a.5.85）および（a.5.87）の右辺では光の移動距離を光の波長に変換している．（a.5.85）および（a.5.88）の右辺には，（a.5.20）の左辺が記述されている．（a.5.86）および（a.5.87）の右辺には，（a.5.21）の左辺が記述されている．（a.5.20）および（a.5.21）の左辺の値はでは u および θ_x が決定することで決定する．このことでは，u および θ_x でなく $-u$ および θ_{x1} が決定することでも同様である．（a.5.85），（a.5.86），（a.5.87）および（a.5.88）のような波長および光の移動距離の関係は u および θ_x を使用して計算できる．

（a.5.34）あるいは（a.5.35）から（a.5.89）を導出できる．（a.5.89）は（a.5.31）を記述している．慣性座標系 S_1 内での光の移動時間 Δt_{tr1} の長短は慣性座標系 S 内の光の周期 T を変えることを（a.5.31）で説明できる．

$$\frac{\Delta t_{tr1}}{T}=\frac{T_1}{\Delta t_{tr}}=\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x\right)\cdots(\text{a.5.34})$$

$$\frac{\Delta t_{tr}}{T_1}=\frac{T}{\Delta t_{tr1}}=\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\text{a.5.35})$$

$$T=\Delta t_{tr1}\cdot\frac{\Delta t_{tr}}{T_1}\cdots(\text{a.5.89})$$

$T = \Delta t_{tr1} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}\right) \cdots (\text{a.5.31})$

（a.5.89）では左辺の慣性座標系 S での周期Tは右辺の慣性座標系 S_1 での周期T_1で記述できる．（a.5.34）の右辺および（a.5.35）の右辺は，各慣性座標系の速度の成分および光が送り出される角度のみで決定する．このことで，（a.5.34）の右辺および（a.5.35）の右辺が決定しているならば光の移動時間Δt_{tr1}が与えられると周期Tが決定する．周期T_1が与えられると光の移動時間Δt_{tr}が決定することも説明できる．（a.5.34）および（a.5.35）で，慣性座標系 S_1 での光の周期T_1および光の移動時間Δt_{tr1}を仮定する．そして，（a.5.89）では周期Tを決定することになる．このことの前提は，慣性座標系 S_1 での周期T_1の光を慣性座標系 S で周期Tの光として仮定できることである．周期T_1を決定することで周期Tが決定できることは，周期の変換として解釈できる．この変換の式について考える．

振動数および周期の関係から（a.5.90）を記述できる．（a.5.90）の右辺に真空中の光の速さを掛けて（a.5.91）の右辺を記述できる．（a.5.83）および（a.5.84）を使用して，（a.5.91）を（a.5.92）に書き換える．

$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{T}{T_1}, (\nu \neq 0, T_1 \neq 0) \cdots (\text{a.5.90})$

$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{c \cdot T}{c \cdot T_1} \cdots (\text{a.5.91})$

$\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdots (\text{a.5.92})$

（a.5.92）から慣性座標系 S での光の波長λを（a.5.93）のように導出できる．（a.5.93）の右辺に記述している振動数の比を（a.5.94）で記述することを定義する．（a.5.94）を使用すると（a.5.93）を（a.5.95）で記述できる．（a.5.95）は（a.5.96）に書き直すことができる．（a.5.96）を波長の変換の式であるものと扱うことができる．

$\lambda = \lambda_1 \cdot \frac{\nu_1}{\nu} \cdots (\text{a.5.93})$

$\psi(\theta_x, u) \equiv \frac{\nu_1}{\nu}, (\nu \neq 0) \cdots (\text{a.5.94})$

$\lambda = \lambda_1 \cdot \psi(\theta_x, u) \cdots (\text{a.5.95})$

$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{1}{\psi(\theta_x, u)}, (\psi(\theta_x, u) \neq 0) \cdots (\text{a.5.96})$

（a.5.94）は（a5.97）に書き直すことで，周波数の変換であるものと解釈できる．周波数の変換（a.5.97）の右辺では，慣性座標系 S での情報であるν，θ_xおよびuを使用して慣性座標系 S_1 での光の周波数ν_1を記述している．

$\nu_1 = \nu \cdot \psi(\theta_x, u), (\nu \neq 0) \cdots (\text{a.5.97})$

波長の変換（a.5.96）では，慣性座標系 S での情報であるλ，θ_xおよびuを使用して慣性座標系 S_1 での光の波長λ_1を記述している．慣性座標系 S_1 での情報であるλ_1，θ_{x1}およびuを使用して慣性座標系 S での光の波長λを（a.5.98）で記述できることを（a.5.96）のように考えることができる．

$\lambda = \lambda_1 \cdot \xi_1(\theta_{x1}, u) \cdots (\text{a.5.98})$

ローレンツ変換では，等速度運動している物体の長さが収縮することを計算できた．その計算では，その物体が静止している慣性座標系の等速度運動する方向の物体の長さが収縮した．時間の長短が慣性座標系ごとに異なることは，物体の移動方向に関係なく成立した．光の波長が変換されることを仮定できたのは，時間の変換を使用したためである．その時間の変換では，（a.5.22）および（a.5.23）のように物体が慣性座標系の等速度運動の方向に移動することも考慮していた．

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_1}=\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\mathrm{a}.5.22)$$

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t}=\gamma\cdot\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x}\right)\cdots(\mathrm{a}.5.23)$$

付録ｖの１周期での波の長さの変換は時間の変換での考えであり，物体の長さの収縮からの考えではない．真空中の光が移動する向きは任意であることを仮定する．特に，図 7.1.1 の時計では，その時計の建造物の床上での水平線で０°から１８０°の範囲で光が送り出されることを仮定する．そして，慣性座標系 S_1 内で波長 λ_1 の光が慣性座標系Ｓ内で光の波長 λ になることを考察する．その際に（a.5.98）の右辺の $\xi_1(\theta_{x1},u)$（a.5.99）を導出することになる．（a.5.95）の左辺に（a.5.98）の右辺を代入すると（a.5.100）を記述できる．（a.5.100）から（a.5.101）を導出できる．付録ｖでは（a.5.101）も導出する．

$$\xi_1(\theta_{x1},u)\cdots(\mathrm{a}.5.99)$$
$$\lambda_1\cdot\psi(\theta_x,u)=\lambda_1\cdot\xi_1(\theta_{x1},u)\cdots(\mathrm{a}.5.100)$$
$$\psi(\theta_x,u)=\xi_1(\theta_{x1},u)\cdots(\mathrm{a}.5.101)$$

図 7.1.1 の時計の送信機から送り出される光の角度（a.5.7）が（7.1.24）ならば余弦（7.1.25）が成立する．慣性座標系Ｓ内の角度（a.5.8）の余弦は（a.5.70）で記述できた．（a.5.70）に（7.1.25）を代入すると（a.5.90）になる．

$$\theta_{x1}\cdots(\mathrm{a}.5.7)$$

$$\theta_{x1}=\frac{\pi}{2}\cdots(7.1.24)$$

$$\cos\theta_{x1}=0\cdots(7.1.25)$$
$$\theta_x\cdots(\mathrm{a}.5.8)$$

$$\cos\theta_x=\frac{\cos\theta_{x1}+\dfrac{u}{c}}{1+\dfrac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\mathrm{a}.5.70)$$

$$\cos\theta_x=\frac{u}{c}\cdots(\mathrm{a}.5.90)$$

慣性座標系Ｓ内の光の波長（a.5.88）に余弦（7.1.25）を代入すると（a.5.102）になる．慣性座標系Ｓ内の光の移動距離（a.5.85）に余弦（7.1.25）を代入すると（a.5.103）になる．

$$\lambda=c\cdot\Delta t_{tr1}\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\mathrm{a}.5.88)$$

$$\lambda=c\cdot\Delta t_{tr1}\cdot\gamma\cdots(\mathrm{a}.5.102)$$

$$c\cdot\Delta t_{tr}=\lambda_1\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}\right)\cdots(\mathrm{a}.5.85)$$

$$c\cdot\Delta t_{tr}=\lambda_1\cdot\gamma\cdots(\mathrm{a}.5.103)$$

（a.5.102）では，慣性座標系Ｓ内の光の波長 λ が大きくなると慣性座標系 S_1 内の光の移動距離 $c\cdot\Delta t_{tr1}$ は長くなる．（a.5.103）では，慣性座標系 S_1 内の光の波長 λ_1 が大きくなると慣性座標系Ｓ内の光の移動距離 $c\cdot\Delta t_{tr}$ は長くなる．（a.5.102）では，慣性座標系Ｓ内の光の周期は慣性座標系 S_1 内の光の移動時間よりも長くなる．このことでは，（a.5.104）を記述できる．（a.5.103）では，慣性座標系 S_1 内の光の周期は慣性座標系Ｓ内の光の移動時間よりも短くなる．このこと

では，(a.5.105) を記述できる．

$c \cdot \Delta t_{tr1} \le \lambda \cdots$(a.5.104)

$\lambda_1 \le c \cdot \Delta t_{tr} \cdots$(a.5.105)

(a.5.104) は (a.5.106) の場合に成立する．(a.5.105) は (a.5.107) の場合に成立する．

$\Delta t_{tr1} \le T \cdots$(a.5.106)

$T_1 \le \Delta t_{tr} \cdots$(a.5.107)

(a.5.106) および (a.5.107) では，慣性座標系 S_1 内の時間よりも慣性座標系 S 内の時間の方が長い．このことから，慣性座標系 S_1 内の時間よりも先に慣性座標系 S 内の時間が光の周期に等しくなる場合を考えることができる．このことでは，慣性座標系 S_1 内の時間が光の周期 T_1 に等しくなる慣性座標系 S 内の時間 Δt_{tr} は慣性座標系 S 内の時間が光の周期 T に等しくなる慣性座標系 S_1 内の時間 Δt_{tr1} よりも長いものと考えることができる．この考えは，次のように導出できる．慣性座標系 S での時間を (a.5.108) で仮定する．同様に，慣性座標系 S_1 での時間を (a.5.109) で仮定する．時間 (a.5.108) を書き直すと (a.5.110) を記述できる．(a.5.110) では，(a.5.111) が成立する．(a.5.111) では，慣性座標系 S_1 で真空中の光が周期 T_1 に達するときの慣性座標系 S での時間 Δt_{tr} は，その真空中の光の周期 T よりも長いことを意味する．

$\Delta t_{trT} \equiv \Delta t_{tr} - T \ge 0 \cdots$(a.5.108)

$\Delta t_{tr1T_1} \equiv T_1 - \Delta t_{tr1} \ge 0 \cdots$(a.5.109)

$\Delta t_{tr} = T + \Delta t_{trT}, (\Delta t_{trT} \ge 0) \cdots$(a.5.110)

$\Delta t_{tr} \ge T \cdots$(a.5.111)

時間 (a.5.109) を書き直すと (a.5.112) を記述できる．(a.5.112) では，(a.5.113) が成立する．(a.5.113) では，慣性座標系 S で真空中の光が周期 T に達するときの慣性座標系 S_1 での時間 Δt_{tr1} は，その真空中の光の周期 T_1 よりも短いことを意味する．

$T_1 = \Delta t_{tr1} + \Delta t_{tr1T_1}, (\Delta t_{tr1T_1} \ge 0) \cdots$(a.5.112)

$T_1 \ge \Delta t_{tr1} \cdots$(a.5.113)

(a.5.102) は (a.5.114) の場合に成立する．(a.5.103) は (a.5.115) の場合に成立する．(a.5.114) および (a.5.115) では慣性座標系 S_1 で静止している図 7.1.1 の時計の送信機から垂直方向 (7.1.24) に光を送り出す場合を仮定した．

$T = \Delta t_{tr1} \cdot \gamma \cdots$(a.5.114)

$\Delta t_{tr} = T_1 \cdot \gamma \cdots$(a.5.115)

(a.5.110) を (a.5.116) に書き直す．(a.5.116) の右辺に (a.5.114) の右辺を代入することで (a.5.117) になる．(a.5.117) は (a.5.118) に書き直すことができる．(a.5.118) では (a.5.119) のように慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 での時間の関係になる．(a.5.119) の右辺では (a.5.120) のように慣性座標系 S での時間関係が成立する．(a.5.119) および (a.5.120) のを使用すると (a.5.121) になる．(a.5.121) では，慣性座標系 S_1 内の時間が光の周期 T_1 に等しくなる慣性座標系 S 内の時間 Δt_{tr} は慣性座標系 S 内の時間が光の周期 T に等しくなる慣性座標系 S_1 内の時間 Δt_{tr1} よりも長いことを記述している．

$\Delta t_{tr} - \Delta t_{trT} = T \cdots$(a.5.116)

$\Delta t_{tr} - \Delta t_{trT} = \Delta t_{tr1} \cdot \gamma \cdots$(a.5.117)

$\dfrac{\Delta t_{tr} - \Delta t_{trT}}{\gamma} = \Delta t_{tr1} \cdots$(a.5.118)

$\Delta t_{tr1} \le \Delta t_{tr} - \Delta t_{trT} \cdots$(a.5.119)

$\Delta t_{tr} - \Delta t_{trT} \le \Delta t_{tr} \cdots$(a.5.120)

$\Delta t_{tr1} \le \Delta t_{tr} \cdots$(a.5.121) （a.5.110）および（a.5.112）では（a.5.121）の両辺のみではなく（a.5.108）および（a.5.109）も記述している．周期 T_1 および周期 T の値を考察するのに，（a.5.108）および（a.5.109）での大きさの関係を考察する．（a.5.110）の左辺に（a.5.115）を代入して，(a.5.110)の右辺の第１項に(a.5.114)を代入すると(a.5.122)を記述できる．(a.5.122)を(a.5.123)に書き直す．（a.5.123）の左辺を（a.5.124）の左辺のように整理する．（a.5.124）の左辺に（a.5.109）の左辺を代入すると（a.5.125）になる．（a.5.125）では（a.5.126）を導出できる．

$$\gamma \cdot T_1 = \gamma \cdot \Delta t_{tr1} + \Delta t_{trT} \cdots (\text{a.5.122})$$

$$\gamma \cdot T_1 - \gamma \cdot \Delta t_{tr1} = \Delta t_{trT} \cdots (\text{a.5.123})$$

$$\gamma \cdot (T_1 - \Delta t_{tr1}) = \Delta t_{trT} \cdots (\text{a.5.124})$$

$$\Delta t_{trT} = \gamma \cdot \Delta t_{tr1T_1} \cdots (\text{a.5.125})$$

$$\Delta t_{tr1T_1} \leq \Delta t_{trT} \cdots (\text{a.5.126})$$

（a.5.121）および（a.5.126）では慣性座標系 S での時間 Δt_{tr} および時間 Δt_{trT} のほうが慣性座標系 S_1 での時間 Δt_{tr1} および時間 Δt_{tr1T_1} よりも長いことを説明している．このような時間の大小関係で，周期 T_1 および周期 T の値について考えていく．（a.5.111），（a.5.113）および（a.5.121）で周期 T_1 および周期 T は（a.5.121）の両辺の値の間に存在することになる．次に，周期 T_1 および周期 T の関係式について考察する．

角度（a.5.7）および角度（a.5.8）を使用して，各慣性座標系での光の波長の大小関係を考えることができる．そのような波長の大小関係から周期の大小関係を説明できる．図 a.5.1 のように慣性座標系 S_1 内での波長 λ_1 の真空中の光が角度（a.5.7）で送り出されているものと仮定する．その真空中の光は，図 a.5.2 のように慣性座標系 S 内では波長 λ の真空中の光として観測できるものと仮定する．

$\theta_{x1} \cdots (\text{a.5.7})$ 図 a.5.1 のように慣性座標系 S_1 で観測した光が移動する方向になる x 軸の正の側からの角度

$\theta_{x} \cdots (\text{a.5.8})$ 図 a.5.2 のように慣性座標系 S で観測した光が移動する方向になる x 軸の正の側からの角度

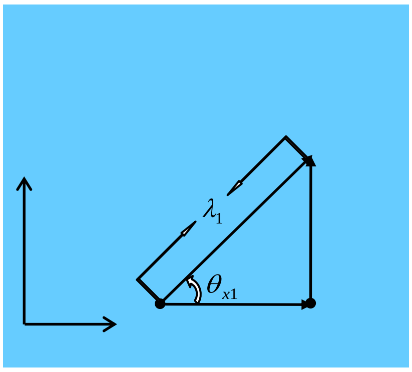

図 a.5.1　慣性座標系 S_1 から観測した光

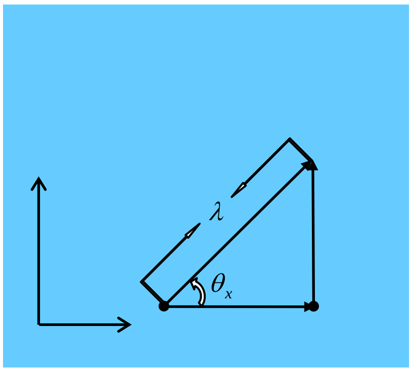

図 a.5.2　慣性座標系 S から観測した光

慣性座標系 S_1 での角度（a.5.7）の正弦波 $\sin\theta_{x1}$ および慣性座標系 S での角度（a.5.8）の正弦波 $\sin\theta_x$ の関係式（a.5.78）が保証されていることは既に説明した．関係式（a.5.78）を使用して導出できる波長の変換から周期 T_1 および周期 T の関係式を導出する．

$$\sin\theta_x = \sin\theta_{x1}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\mathrm{a}.5.78)$$

特殊相対性理論では時間を観測するのに真空中の光を使用する．７章１節では時間を観測するのに使用する時計を図 7.1.1 で与えた．ここでは，図 7.1.1 の時計を使用して図 a.5.1 および図 a.5.2 の波長の関係を考察する．光速度の不変の原理を使用することで，慣性座標系内の光の移動距離 $c\cdot\Delta t$ は図 7.1.1 の時計内の送信機から垂直方向に送り出された真空中の光の垂直方向の距離に等しいものとなる．真空中の光の正弦の関係（a.5.78）が保証されることで，２つの慣性座標系での真空中の光の垂直方向の光の移動距離は互いに保証された或る関係式を満足する．その関係式を導出することで波長の変換を記述できる．

慣性座標系 S で図 a.5.3 のように角度（a.5.8）で図 7.1.1 の時計の送信機から波長（a.5.127）の光が送り出された場合を仮定する．波長（a.5.127）は図 a.5.1 および図 a.5.2 のそれぞれの波長および角度を使用して決定できることを次に説明する．

$\lambda_p\cdots(\mathrm{a}.5.127)$時計の送信機から送り出された光の波長

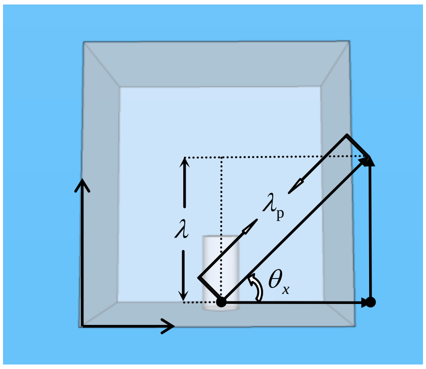

図 a.5.3　慣性座標系 S で静止する時計内から観測した光の変位ベクトルの和

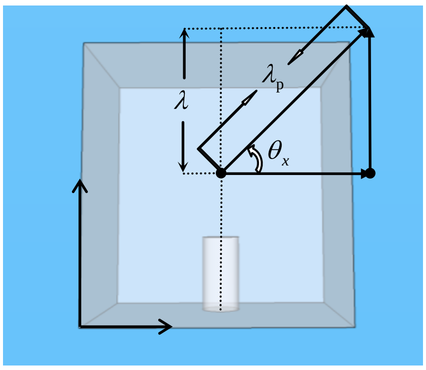

図 a.5.4　慣性座標系 S で静止する時計内から観測した光の変位ベクトルの和

図 a.5.3 のように送り出された真空中の光は慣性座標系 S 内の別の時計内で図 a.5.4 のように受信される．図 7.1.1 の時計は時計内の垂直方向の距離で時間を計算する．図 a.5.3 の波長 λ は送信機から送り出された光の波長 λ_p とは（a.5.128）の関係を保証されている．図 a.5.3 および図 a.5.4 のように波長（a.5.127）の光が波長分移動した場合は，図 7.1.1 の時計は（a.5.128）から光の移動距離の観測に誤差を計算できる．垂直上方の光の移動距離 λ は波長 λ_p よりも短いことは明らかである．

$\lambda = \lambda_p\cdot\sin\theta_x\cdots(\mathrm{a}.5.128)$

（a.5.128）のような関係は慣性座標系 S_1 および慣性座標系 S の両方で保証される．図 a.5.5 は慣性座標系 S_1 内に静止する図 7.1.1 の時計内の送信機から波長 λ_p（a.5.127）の真空中の光を送り出している場合の波長 λ_1 の関係を示している．図 a.5.5 では（a.5.129）が保証されている．

$\lambda_1 = \lambda_p\cdot\sin\theta_{x1}\cdots(\mathrm{a}.5.129)$

図 a.5.6 では慣性座標系 S 内に静止する図 7.1.1 の時計内の送信機から波長 λ_p（a.5.127）の真空中の光を送り出している場合の波長の関係を示している．図 a.5.6 では（a.5.128）が保証されている．（a.5.128）および（a.5.129）では同じ波長

λ_p（a.5.127）を送信機から送り出すことで異なる波長（a.5.128）および波長（a.5.129）を計算できる．図 a.5.1 および図 a.5.2 を仮定しているならば，（a.5.128）および（a.5.129）で波長 λ_p を決定できる．

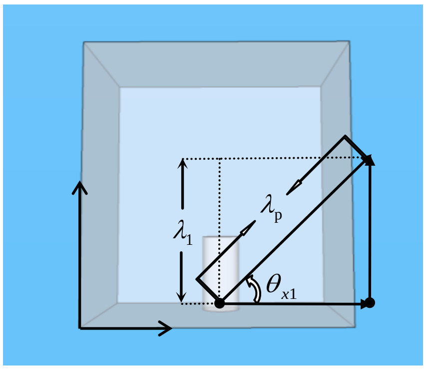

図 a.5.5　慣性座標系 S_1 で静止する時計内から観測した光の変位ベクトルの和

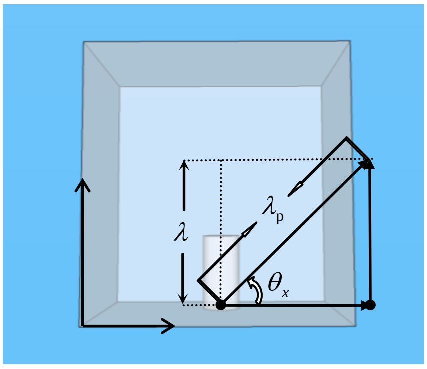

図 a.5.6　慣性座標系 S で静止する時計内から観測した光の変位ベクトルの和

図 a.5.5 および図 a.5.6 のそれぞれの角度（a.5.7）および角度（a.5.8）は図 a.5.1 および図 a.5.2 でそれぞれの光が進んでいる角度に等しい．図 a.5.1 および図 a.5.2 の光の移動距離は慣性座標系内に静止する図 7.1.1 の時計の送信機から垂直方向に送り出された光の移動距離に等しい．そのような光の移動距離に（a.5.128）の左辺および（a.5.129）の左辺は等しいものと考えることができる．図 a.5.5 および図 a.5.6 では，垂直方向に光が送信機から送り出されない場合を考えている．そのような場合では，図 7.1.1 の時計は図 7.1.1 の建造物の床に対して垂直方向の光の移動距離を使用して時間を計算する．この時間の計算方法では，送信機から光が送り出される角度が（7.1.24）からずれることで時間の誤差を考えることができる．このずれを生じさせる角度（a.5.7）および角度（a.5.8）を利用すると，変換（a.5.78）を図 7.1.1 の時計で使用して光の移動距離である波長 λ（a.5.128）および波長 λ_1（a.5.129）の関係を導出できる．

$$\theta_{x1} = \frac{\pi}{2} \cdots (7.1.24)$$

角度（a.5.7）および角度（a.5.8）では（a.5.78）が成立するので，（a.5.78）の両辺に波長（a.5.127）を掛けると（a.5.130）を記述できる．（a.5.130）の左辺に（a.5.128）の左辺を代入して，（a.5.130）の右辺に（a.5.129）の左辺を代入すると（a.5.131）を記述できる．（a.5.131）では，慣性座標系 S_1 の図 a.5.1 の光の波長 λ_1 を慣性座標系 S の図 a.5.2 のように観測した場合の波長 λ との関係を記述している．

$$\sin\theta_x = \sin\theta_{x1} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (a.5.78)$$

$$\lambda_p \cdot \sin\theta_x = \lambda_p \cdot \sin\theta_{x1} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (a.5.130)$$

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a.5.131})$$

（a.5.98）で波長の変換を考えた．（a.5.131）では波長の変換を記述できている．ここで，（a.5.131）の左辺に（a.5.98）の右辺を代入すると（a.5.132）を記述できる．（a.5.132）から（a.5.133）を導出できることは明らかである．

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \xi_1(\theta_{x1}, u) \cdots (\text{a.5.98})$$

$$\lambda_1 \cdot \xi_1(\theta_{x1}, u) = \lambda_1 \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a.5.132})$$

$$\xi_1(\theta_{x1}, u) = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a.5.133})$$

次に変換式（a.5.96）について計算する．（a.5.21）および（a.5.78）を使用して（a.5.62）を記述できる．

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{1}{\psi(\theta_x, u)}, (\psi(\theta_x, u) \neq 0) \cdots (\text{a.5.96})$$

$$\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}} \cdots (\text{a.5.21})$$

$$\sin\theta_{x1} = \frac{\sin\theta_x \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\text{a.5.62})$$

（a.5.62）の両辺に波長λ_p（a.5.127）を掛けると（a.5.134）を記述できる．（a.5.134）の左辺に（a.5.129）の左辺を代入して，（a.5.134）の右辺に（a.5.128）の左辺を代入すると（a.5.135）を記述できる．（a.5.135）では，慣性座標系 S_1 の図 a.5.1 の光の波長λ_1を慣性座標系 S の図 a.5.2 のように観測した場合の波長λとの関係を記述している．

$$\lambda_p \cdot \sin\theta_{x1} = \lambda_p \cdot \sin\theta_x \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\text{a.5.134})$$

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\text{a.5.135})$$

（a.5.135）の左辺に（a.5.96）の右辺を代入すると（a.5.136）を記述できる．（a.5.136）から（a.5.137）を導出できることは明らかである．（a.5.137）は（a.5.138）に書き直すことができる．

$$\lambda\cdot\frac{1}{\psi(\theta_x,u)}=\lambda\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\mathrm{a}.5.136)$$

$$\frac{1}{\psi(\theta_x,u)}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\mathrm{a}.5.137)$$

$$\psi(\theta_x,u)=\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(\mathrm{a}.5.138)$$

(a.5.21) の左辺に (a.5.138) の左辺を代入する．さらに，(a.5.21) の右辺に (a.5.133) の左辺を代入することで，(a.5.139) を記述できる．（a.5.139）は（a.5.101）に等しい．

$$\frac{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\mathrm{a}.5.21)$$

$$\psi(\theta_x,u)=\xi_1(\theta_{x1},u)\cdots(\mathrm{a}.5.139)$$

$$\psi(\theta_x,u)=\xi_1(\theta_{x1},u)\cdots(\mathrm{a}.5.101)$$

図 7.1.1 の時計で正確に時間を観測するには角度 (7.1.24) で送信機から真空中で光を送り出す必要がある．角度 (7.1.24) では正弦は（a.5.102）である．（a.5.129）で（a.5.102）を使用すると（a.5.140）を得る．（a.5.140）は，図 a.5.7 のように図 7.1.1 の時計の送信機から送り出される光の波長 λ_p が図 a.5.1 のように角度（7.1.24）で進んでいる光の波長 λ_1 に等しいことを意味する．その場合では，慣性座標系 S では，その光は図 a.5.2 のように進むことになる．慣性座標系 S 内に静止する図 7.1.1 の時計では角度 (a.5.8) で送信機から波長 λ_p の光が送り出すことで，図 a.5.2 の光の波長を計算できる．その角度（a.5.8）の余弦は（a.5.90）になる．その光が送り出される情報を図 a.5.8 で示している．

$$\theta_{x1}=\frac{\pi}{2}\cdots(7.1.24)$$

$$\sin\theta_{x1}=1\cdots(\mathrm{a}.5.102)$$

$$\lambda_1=\lambda_p\cdot\sin\theta_{x1}\cdots(\mathrm{a}.5.129)$$

$$\lambda_1=\lambda_p\cdots(\mathrm{a}.5.140)$$

$$\theta_x\cdots(\mathrm{a}.5.8)$$

$$\cos\theta_x=\frac{u}{c}\cdots(\mathrm{a}.5.90)$$

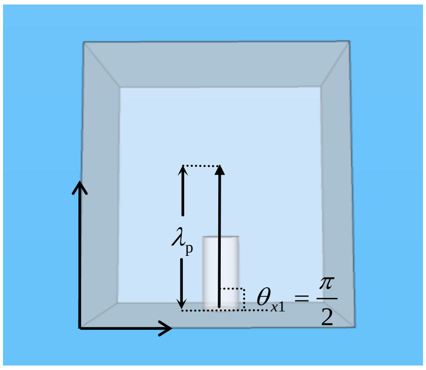

図 a.5.7　慣性座標系 S_1 から観測した光の変位ベクトルの和

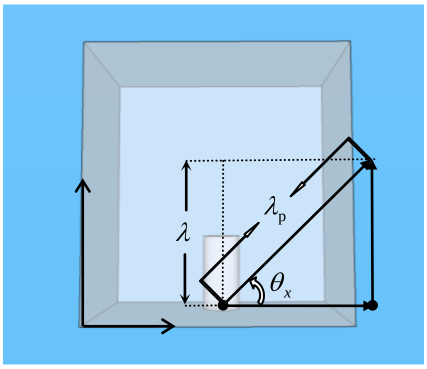

図 a.5.8　慣性座標系 S から観測した光の変位ベクトルの和

角度 (7.1.24) の余弦は (7.1.25) である. 波長の変換 (a.5.131) に (7.1.25) を使用すると (a.5.141) を得る. (a.5.141) では，図 a.5.1 の角度 (7.1.24) で送信機から送り出された真空中の光の波長を慣性座標系 S で観測すると (a.5.141) のように収縮することを説明している.

$\cos\theta_{x1}=0\cdots(7.1.25)$

$$\lambda=\lambda_1\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\mathrm{a.5.131})$$

$$\lambda=\lambda_1\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdots(\mathrm{a.5.141})$$

波長の変換 (a.5.131) を使用すると周期の変換 (a.5.142) を記述できる. (a.5.142) に余弦 (7.1.25) を使用すると (a.5.143) を得る. (a.5.143) では，図 a.5.1 の角度 (7.1.24) で送信機から送り出された真空中の光の周期を慣性座標系 S で観測すると (a.5.143) のように短くなることを説明している.

$$T=T_1\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\mathrm{a.5.142})$$

$$T=T_1\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdots(\mathrm{a.5.143})$$

図 a.5.7 および図 a.5.8 を仮定した周期の変換 (a.5.143) では (a.5.144) を記述できる. (a.5.121) を既に導出した. その導出の前に (a.5.111) および (a.5.113) を導出している. (a.5.111), (a.5.113), (a.5.121) および (a.5.144) を使用すると (a.5.145) が成立する.

$T\le T_1\cdots(\mathrm{a.5.144})$

$\Delta t_{tr1}\le\Delta t_{tr}\cdots(\mathrm{a.5.121})$

$\Delta t_{tr}\ge T\cdots(\mathrm{a.5.111})$

$T_1\ge\Delta t_{tr1}\cdots(\mathrm{a.5.113})$

$\Delta t_{tr1}\le T\le T_1\le\Delta t_{tr}\cdots(\mathrm{a.5.145})$ 図 a.5.7 および図 a.5.8 を仮定した時間の関係

(a.5.144) では慣性座標系Sで観測した周期 T は慣性座標系 S_1 で観測した周期 T_1 よりも短い. (a.5.121) および (a.5.126) では慣性座標系Sで観測した真空中の光の移動距離 Δt_{tr} は慣性座標系 S_1 で観測した真空中の光の移動距離 Δt_{tr1} よりも長い. (a.5.145) では，そのような時間関係を説明できる.

$\Delta t_{tr1T_1} \le \Delta t_{trT} \cdots (\mathrm{a.5.126})$

周期の変換 (a.5.141) の右辺に (a.5.146) を代入すると (a.5.147) になる. (a.5.146) では２つの慣性座標系は互いに静止していることになる. このことで２つの慣性座標系はひとつの同じ慣性座標系上で真空中の光を観測した場合に等しい結果 (a.5.147) を示している.

$$T = T_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdots (\mathrm{a.5.141})$$

$$u = 0 \cdots (\mathrm{a.5.146})$$

$$T = T_1 \cdots (\mathrm{a.5.147})$$

(a.5.146) を (2.12) の右辺に代入すると (a.5.148) になる. (a.5.148) を (a.5.114) の右辺に代入すると (a.5.149) になる. (a.5.148) を (a.5.115) の右辺に代入すると (a.5.150) になる. (a.5.147), (a.5.149) および (a.5.150) を使用すると (a.5.151) を記述できる.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \mathrm{const.}) \cdots (2.12)$$

$$\gamma = 1 \cdots (\mathrm{a.5.148})$$

$$T = \Delta t_{tr1} \cdot \gamma \cdots (\mathrm{a.5.114})$$

$$T = \Delta t_{tr1} \cdots (\mathrm{a.5.149})$$

$$\Delta t_{tr} = T_1 \cdot \gamma \cdots (\mathrm{a.5.115})$$

$$\Delta t_{tr} = T_1 \cdots (\mathrm{a.5.150})$$

$$\Delta t_{tr1} = T = T_1 = \Delta t_{tr} \cdots (\mathrm{a.5.151})$$

(a.5.152) および (a.5.153) を仮定すると, (a.5.121) を使用して (a.5.144) を記述できる. (a.5.152) および (a.5.153) での議論の (a.5.144) は，慣性座標系の慣性運動の速さの一部の場合での議論になる.

$$T \approx \Delta t_{tr1} \cdots (\mathrm{a.5.152})$$

$$\Delta t_{tr} \approx T_1 \cdots (\mathrm{a.5.153})$$

$$T \le T_1 \cdots (\mathrm{a.5.144})$$

周期の変換 (a.5.142) は (a.5.154) に書き直すことができる. (a.5.154) は周波数の変換 (a.5.155) として解釈できる. 周波数の変換 (a.5.155) は周波数の変換 (7.1.23) に等しい.

$$T = T_1 \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}} \cdots (\mathrm{a.5.142})$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\theta_{x1}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdots (\mathrm{a.5.154})$$

$$\nu = \nu_1 \cdot \frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(\text{a.5.155})$$

$$\nu = \nu_1 \times \frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(7.1.23)\text{光の振動数の変換}$$

（7.1.24）を周波数の変換（a.5.155）に使用すると（a.5.156）を記述できる．図 a.5.7 および図 a.5.8 を仮定した場合での周波数は（a.5.156）のように変換が成立する．

$$\theta_{x1} = \frac{\pi}{2}\cdots(7.1.24)$$

$$\nu = \nu_1 \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdots(\text{a.5.156})$$

（a.5.94）では（a.5.139）が成立した．（a.5.139）および（a.5.155）を使用すると，（a.5.133）を導出できる．

$$\psi(\theta_x, u) \equiv \frac{\nu_1}{\nu}, (\nu \neq 0)\cdots(\text{a.5.94})$$

$$\psi(\theta_x, u) = \xi_1(\theta_{x1}, u)\cdots(\text{a.5.139})$$

$$\xi_1(\theta_{x1}, u) = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a.5.133})$$

余弦（a.5.157）の場合で，余弦の変換（a.5.70）を計算する．余弦の変換（a.5.70）の左辺に（a.5.157）を代入すると（a.5.158）になる．

$$\cos\theta_x = 1\cdots(\text{a.5.157})$$

$$\cos\theta_x = \frac{\cos\theta_{x1}+\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a.5.70})$$

$$1 = \frac{\cos\theta_{x1}+\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}\cdots(\text{a.5.158})$$

（a.5.158）を（a.5.159）に書き直す．（a.5.159）の右辺の第２項を（a.5.159）の左辺に移項して，（a.5.159）の左辺の第２項を（a.5.159）の右辺に移項すると（a.5.160）を記述できる．（a.5.160）から（a.5.161）を導出できる．（a.5.157）および（a.5.161）を使用して（a.5.162）を記述できる．

$$1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1} = \cos\theta_{x1}+\frac{u}{c}\cdots(\text{a.5.159})$$

$$1-\frac{u}{c}=\left(1-\frac{u}{c}\right)\cdot\cos\theta_{x1}\cdots(\mathrm{a}.5.160)$$

$$1=\cos\theta_{x1}\cdots(\mathrm{a}.5.161)$$

$$\cos\theta_x=\cos\theta_{x1}=1\cdots(\mathrm{a}.5.162)$$

余弦（a.5.157）の右辺を（a.5.135）の右辺に代入すると（a.5.163）になる．（a.5.163）を計算した（a.5.135）は（a.5.128）および（a.5.129）を使用して導出したものである．（a.5.128）および（a.5.129）の右辺の正弦を計算する．

$$\lambda_1=\lambda\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\mathrm{a}.5.135)$$

$$\lambda_1=\lambda\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}}\cdots(\mathrm{a}.5.163)$$

$$\lambda=\lambda_p\cdot\sin\theta_x\cdots(\mathrm{a}.5.128)$$

$$\lambda_1=\lambda_p\cdot\sin\theta_{x1}\cdots(\mathrm{a}.5.129)$$

余弦（a.5.161）では正弦（a.5.164）が成立する．（a.5.164）の右辺を（a.5.62）の右辺に代入すると（a.5.165）になる．

$$\sin\theta_{x1}=0\cdots(\mathrm{a}.5.164)$$

$$\sin\theta_{x1}=\frac{\sin\theta_x\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\mathrm{a}.5.62)$$

$$\sin\theta_x=0\cdots(\mathrm{a}.5.165)$$

正弦（a.5.164）および正弦（a.5.165）を（a.5.134）に代入すると（a.5.166）になる．（a.5.166）は（a.5.167）に記述できる．（a.5.167）の両辺の波長は零になって（a.5.167）が成立している．

$$\lambda_p\cdot\sin\theta_{x1}=\lambda_p\cdot\sin\theta_x\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\mathrm{a}.5.134)$$

$$\lambda_p\cdot 0=\lambda_p\cdot 0\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\mathrm{a}.5.166)$$

$$0=0\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}}\cdots(\text{a.5.167})$$

（a.5.167）の右辺には（a.5.168）が成立している．この議論では，（a.5.169）の場合で慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 で真空中の光が進んでいる場合を仮定している．この仮定では（a.5.167）は成立しない．

$$\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}}\neq 0\cdots(\text{a.5.168})$$

$$\sin\theta_x=\sin\theta_{x1}=0\cdots(\text{a.5.169})$$

（a.5.169）は（a.5.170）の場合で成立する．ここで（a.5.170）が成立しているものと仮定して（a.5.166）について考えると（a.5.171）が成立する．（a.5.171）が成立することで，（a.5.162）の場合では波長の変換（a.5.134）が使用できないものと解釈できる．しかし，付録 v での以降の考察では，（a.5.162）の場合では波長の変換（a.5.134）が使用できるものと解釈することになる．波長の変換（a.5.134）で使用した（a.5.128）および（a.5.129）の波長の計算方法について考察する．その考察から（a.5.162）の場合で波長の変換が使用できるものと説明する．

$$\sin\theta_x=\sin\theta_{x1}\cdots(\text{a.5.170})$$

$$\lambda_p\neq\lambda_p\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}\cdots(\text{a.5.171})$$

$$\lambda=\lambda_p\cdot\sin\theta_x\cdots(\text{a.5.128})$$

$$\lambda_1=\lambda_p\cdot\sin\theta_{x1}\cdots(\text{a.5.129})$$

（a.5.162）では慣性座標系 S_1 の x 軸の正の方向に水平に光が進んでいるものとすると，慣性座標系 S の x 軸の正の方向に水平に光が進んでいる必要がある．そのような向きに進む真空中の光の波長を波長の変換（a.5.134）で計算するには，図 7.1.1 の時計の送信機から垂直方向に送り出される真空中の光を使用することになる．送信機から垂直方向に進んだ光の移動距離は（a.5.162）の場合では零になってしまう．このことで，波長の変換（a.5.134）での計算結果が（a.5.162）の場合は理論上の仮定とは異なる結果になる．ここで，次のように仮定する．（a.5.172）の場合では図 7.1.1 の送信機から送り出される真空中の光の波長は（a.5.173）で成立するものと仮定する．

$$0<\sin\theta_{x1}\leq 1, 0<\sin\theta_x\leq 1\cdots(\text{a.5.172})$$

$$\lambda_p=\frac{\lambda}{\sin\theta_x}=\frac{\lambda_1}{\sin\theta_{x1}},(0<\sin\theta_{x1}\leq 1, 0<\sin\theta_x\leq 1)\cdots(\text{a.5.173})$$

そのように仮定した (a.5.173) では極限値 (a.5.174) および極限値 (a.5.175) が成立するものと扱うことができる．この仮定での（a.5.173）では，（a.5.169）の場合での慣性座標系 S_1 および慣性座標系 S で進んでいる真空中の光の波長 λ_1 および波長 λ を λ_p で記述できないことになる．

$$\lambda_p=\lambda_1\cdot\lim_{\theta_{x1}\to 0}\frac{1}{\sin\theta_{x1}},(\sin\theta_{x1}\neq 0)\cdots(\text{a.5.174})$$

$\lambda_p = \lambda \cdot \lim_{\theta_1 \to 0} \frac{1}{\sin\theta_x}, (\sin\theta_x \neq 0) \cdots (\text{a.5.175})$

$\sin\theta_x = \sin\theta_{x1} = 0 \cdots (\text{a.5.169})$

ここでの議論では，（a.5.162）の場合では慣性座標系 S_1 で進んでいる真空中の光の波長は（a.5.176）であり，慣性座標系 S で進んでいる真空中の光の波長は（a.5.177）であるものと仮定している．このことでは，（a.5.169）の場合で（a.5.176）および（a.5.177）を仮定しているものとして扱うことができる．

$\lambda_1, (\cos\theta_{x1} = 1) \cdots (\text{a.5.176})$

$\lambda, (\cos\theta_x = 1) \cdots (\text{a.5.177})$

波長の変換（a.5.134）の両辺に（a.5.176）および（a.5.177）を代入すると（a.5.178）を記述できる．一般に（a.5.179）は成立する．（a.5.178）を（a.5.180）に書き直す．

$$\lambda_p \cdot \sin\theta_{x1} = \lambda_p \cdot \sin\theta_x \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\text{a.5.134})$$

$$\frac{\lambda_1}{\sin\theta_{x1}} \cdot \sin\theta_{x1} = \frac{\lambda}{\sin\theta_x} \cdot \sin\theta_x \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}, (\sin\theta_{x1} \neq 0, \sin\theta_x \neq 0) \cdots (\text{a.5.178})$$

$$\frac{\sin\theta_{x1}}{\sin\theta_{x1}} \cdot = \frac{\sin\theta_x}{\sin\theta_x} = 1, (\sin\theta_{x1} \neq 0, \sin\theta_x \neq 0) \cdots (\text{a.5.179})$$

$$\lambda_1 \cdot \sin\theta_x \cdot \sin\theta_{x1} = \lambda \cdot \sin\theta_{x1} \cdot \sin\theta_x \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x}, (\sin\theta_{x1} \neq 0, \sin\theta_x \neq 0) \cdots (\text{a.5.180})$$

（a.5.179）が成立するならば（a.5.181）および（a.5.182）が成立することは明らかである．正弦が零であるならば（a.5.181）および（a.5.182）が成立しても（a.5.179）は成立しないことは明らかである．このことで，（a.5.181）および（a.5.182）が成立しても（a.5.178）が成立しない場合を認めることになる．

$\sin\theta_x = \sin\theta_x \cdots (\text{a.5.181})$

$\sin\theta_{x1} = \sin\theta_{x1} \cdots (\text{a.5.182})$

（a.5.183）に記述した正弦の値が（a.5.162）の場合を含めた（a.5.170）のすべての値を取るものと仮定する．その仮定でも（a.5.183）は数学としての計算では一般に成立する．（a.5.183）から（a.5.135）を導出できることは明らかである．

$$\lambda_1 \cdot \sin\theta_x \cdot \sin\theta_{x1} = \lambda \cdot \sin\theta_{x1} \cdot \sin\theta_x \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\text{a.5.183})$$

$\cos\theta_x = \cos\theta_{x1} = 1 \cdots (\text{a.5.162})$

$\sin\theta_x = \sin\theta_{x1} \cdots (\text{a.5.170})$

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\mathrm{a}.5.135)$$

（a.5.169）の場合を含めて（a.5.135）が物理学理論で成立することを次のように仮定できる．物理学での仮定としては，（a.5.176）および（a.5.177）のように波長を仮定した．同じ波長の光を送り出す角度を連続的に変化させた場合には他の慣性座標系内で光が進む角度も連続的に変化する．このことは（a.5.62）で明らかである．

$$\sin\theta_{x1} = \frac{\sin\theta_x \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_x} \cdots (\mathrm{a}.5.62)$$

そのように連続に変化する角度を独立変数にする関数として（a.5.135）を扱うものとする．他の慣性座標系上で変換される波長が連続に変化することは，その関数（a.5.135）で示している．波長が不連続で変化すると電場および磁場のエネルギーが不連続で変化するものと考えることができる．このことは，エネルギーの変換（4.11）でエネルギーが連続に変化することに整合しない．

$$E(c) = E_1(c) \times \frac{1+\frac{u}{c}\cdot\cos\theta_{x1}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdots (4.11)$$

電気の回路についても，一般の我々の日常経験では等速度運動している物体に固定している回路の電圧および電流が不連続になる場合を確認していない．そのような電圧および電流の不連続になる現象ではキルヒホッフの法則が成立しなくなることが考えられる[11)]．電磁波によるエネルギーの送受信および光の信号の送受信を応用している電気の回路で観測されていないものと，この議論では仮定する．このことから，波長が連続的に変化するように変換されることを仮定できる．このように波長が連続に変化するものと考えることができるので，付録ｖの考察では（a.5.162）の場合で波長の変換（a.5.163）が成立するものと扱う．

$$\cos\theta_x = \cos\theta_{x1} = 1 \cdots (\mathrm{a}.5.162)$$

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}} \cdots (\mathrm{a}.5.163)$$

参考文献

1） 富岡和人，“特殊相対性理論の速度の変換”，p.2，pp.5-8，pp.32-38，pp.40-59，pp.66-69.

2） ROBERT RESNICK，1968： INTRODUCTION TO SPECIAL RELATIVITY，John Wiley & Sons，Inc. ，pp.136-137，pp.140-141，p.144，p.146.

3） H.A.LORENTZ，A.EINSTEIN，H.MINKOWSKI AND H.WEYL，1923 TRANSLATION：THE PRINCIPLE OF RELATIVITY，DOVER PUBLICATIONS，INC.，pp.61-62，pp.69-71.

4） ROBERT RESNICK，DAVID HALLIDAY，KENNETH S. KRANE，1992：PHYSICS 4th Edition Volume1，John Wiley & Sons，Inc. ，pp.165-167，p.188.

5) Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, and David B. Newell, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8420, USA (Dated: December 28, 2007)：CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: ２００６,（ http://physics ）.nist.gov/cuu/Constants/codata.pdf
6) 富岡和人,"AL_COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006",循環系に関する研究報告,(2006-12-27)
7) 富岡和人,"AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008",循環系に関する研究報告,(2008-12-25)
8) 富岡和人,"循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回"
9) 富岡和人,"循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回"
10) 富岡和人,"循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回"
11) 富岡和人,"電位の簡単な入門 2007 第五回"
12) 富岡和人,"電位の簡単な入門 2007 第一回"
13) 富岡和人,"電位の簡単な入門 2007Option"

特殊相対性理論のエネルギーの変換と質量の変換 富岡和人(とみおかかずひと)著

作成日：2008 年 12 月 13 日
発行日：2008 年 12 月 13 日
改訂発行日：2009 年 07 月 16 日
改訂発行日：2010 年 11 月 17 日

循環系の回路モデルの文献

"AL_COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006",循環系に関する研究報告,(2006-12-27)
"AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008",循環系に関する研究報告,(2008-12-25)
"循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回"
"循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回"
"循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回"

電気の回路論の文献

“電位の簡単な入門 2007 第一回”

“電位の簡単な入門 2007 第二回”

“電位の簡単な入門 2007 第三回”

“電位の簡単な入門 2007 第四回”

“電位の簡単な入門 2007 第五回”

“電位の簡単な入門 2007Option”

アインシュタインの特殊相対性理論の文献

“特殊相対性理論の速度の変換”

ホームページ

http://www.alifecom.info/

http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/

http://book.geocities.jp/alifecominfo/

http://alifecominfo.aikotoba.jp/

特殊相対性理論のページ

http://www.alifecom.info/relativity.htm

http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/relativity.htm

http://book.geocities.jp/alifecominfo/relativity.htm

http://alifecominfo.aikotoba.jp/relativity.htm